WS 2025/26 Prof. Hansjörg Geiges

Norman Thies

Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Sei R ein Polygon in einem Flächenstück $\mathbf{x}\colon U \to M \subset \mathbb{R}^3$. Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, daß das Integral $\iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} K\,dA$ den Winkel mißt, um den sich ein entlang der Randkurve $\boldsymbol{\gamma}$ von R parallel verschobenes Vektorfeld $\mathbf{X}$ dreht. Wir nehmen dazu an, daß der metrische Tensor die Form $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h^2 \end{pmatrix}$ mit $h > 0$ hat (geodätische Parallelkoordinaten).

Schreibe $\boldsymbol{\gamma}(s) = \mathbf{x}\left(\gamma^1(s), \gamma^2(s)\right)$ mit Bogenlängenparameter s und

$$\mathbf{X}(s) = \cos\varphi(s) \cdot \mathbf{x}_1(\gamma^1(s), \gamma^2(s)) + \frac{\sin\varphi(s)}{h} \cdot \mathbf{x}_2(\gamma^1(s), \gamma^2(s)).$$

Zeigen Sie nun, daß

$$\varphi'(s) = -h_1(\gamma^1(s), \gamma^2(s)) \cdot (\gamma^2)'(s).$$

Folgern Sie daraus, daß sich $\mathbf{X}$ bei einem Umlauf von $\boldsymbol{\gamma}$ um den Winkel $\triangle\varphi = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \varphi'\,ds = \iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} K\,dA$ dreht.

Aufgabe 2. (a) Sei $\gamma\colon [a,b] \to M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve in einer Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$. Sei α der Winkel zwischen der Flächennormalen $\mathbf{n}$ und dem Binormalenvektor $\mathbf{B}$ an die Kurve γ. Zeigen Sie, daß die Krümmung k von γ (als Raumkurve) und die geodätische Krümmung k_g die Beziehung $k_g = k\cos\alpha$ erfüllen.

(b) Sei γ der positiv orientierte Breitenkreis des Breitengrads $\phi_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ auf der 2-Sphäre S^2. Zeigen Sie, daß $k = 1/\cos\phi_0$.

(c) Zeigen Sie, daß $k_g = \tan\phi_0$

(i) mittels (a),

(ii) mittels Aufgabe 1 von Übungsblatt 6, wo wir $k_n \equiv 1$ für Kurven mit Spur in S^2 gezeigt haben, und der Beziehung zwischen k, k_n und k_g. Wie bestimmt sich hier das Vorzeichen von k_g?

(d) Zeigen Sie mittels des lokalen Satzes von Gauß–Bonnet, daß die von γ (positiv) berandete Teilfläche von S^2 den Flächeninhalt $2\pi(1 - \sin\phi_0)$ hat.

b.w.

Aufgabe 3. Auf der 2-Sphäre S^2 (ohne Nord- und Südpol) betrachten wir geodätische Parallelkoordinaten längs des Äquators, wobei die positive s-Richtung der Geodätischen ausgehend vom Äquator als südliche Richtung gewählt sei, so daß die durch (s, t) gegebene Orientierung von S^2 der äußeren Normalen entspricht.

(a) Berechnen Sie mittels Lemma 4.8 die Geodätische Krümmung des Breitenkreises $\{s = s_0\}$ für $s_0 \in [0, \pi/2)$. Vergleichen Sie dies mit Aufgabe 2 (c).

(b) Wir betrachten das 4-gon auf S^2, definiert durch

$$t = \varphi \in [\varphi_0, \varphi_1] \quad \text{und} \quad s = \theta - \pi/2 \in [0, s_0]$$

mit $0 < \varphi_0 < \varphi_1 < 2\pi$ und $0 < s_0 < \pi/2$. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses 4-gons

(i) in sphärischen Koordinaten (θ, φ),

(ii) in geodätischen Parallelkoordinaten (s, t).

Vergleichen Sie dies mit Aufgabe 2 (d).

(c) Verifizieren Sie den lokalen Satz von Gauß–Bonnet für dieses 4-gon.

Aufgabe 4. (a) Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte Fläche. Zeigen Sie, daß es eine positive reelle Zahl c gibt, so daß der Flächeninhalt jeder (topologischen) 2-Scheibe in M, die von einer einfach geschlossenen Geodätischen berandet wird, mindestens gleich c ist.

(b) Konstruieren Sie eine nicht-kompakte Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine einfach geschlossene Geodätische in M gibt, die eine Scheibe vom Flächeninhalt kleiner als ε berandet.

Abgabe: Donnerstag 22.1.26 bis spätestens 7:58 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).