

Algebraische Topologie

Übungsblatt 1

Zur Erinnerung: Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ bestehend aus einer Menge X und einer Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X , genannt **offene Mengen**, mit den Eigenschaften:

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$,
- (ii) der Durchschnitt je zweier offener Mengen ist offen,
- (ii) die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

Eine Abbildung $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ zwischen zwei topologischen Räumen heißt **stetig**, falls $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$ für alle $V \in \mathcal{O}_Y$.

Präsenzaufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X . Mit $X/\sim$ werde die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnet. Wir schreiben $[x] \in X/\sim$ für die Äquivalenzklasse von $x \in X$ und $\pi: X \rightarrow X/\sim$ für die kanonische Projektion, d.h. $\pi(x) := [x]$. Wir nennen $U \subset X/\sim$ offen, falls $\pi^{-1}(U)$ offen in X ist.

Zeigen Sie:

- (i) Dies definiert eine Topologie auf $X/\sim$, die sogenannte **Quotiententopologie**.
- (ii) Die Quotiententopologie ist die feinste Topologie auf $X/\sim$ (d.h. die Topologie mit den meisten offenen Mengen), für die π stetig ist.
- (iii) Für einen weiteren topologischen Raum Y ist eine Abbildung $f: X/\sim \rightarrow Y$ genau dann stetig, wenn $f \circ \pi: X \rightarrow Y$ stetig ist.

Der **projektive Raum** $\mathbb{RP}^n$ ist der Raum aller Ursprungsgeraden im $\mathbb{R}^{n+1}$. Formal kann man $\mathbb{RP}^n$ definieren als Quotientenraum $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$, wobei die Äquivalenzrelation gegeben ist durch

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: y = \lambda x.$$

Alternativ kann man $\mathbb{RP}^n$ schreiben als $S^n / x \sim -x$. Die Äquivalenzklasse eines Punktes

$$(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

schreibt man dann in **homogenen Koordinaten** als $[x_0 : \dots : x_n]$, d.h. es gilt

$$[x_0 : \dots : x_n] = [\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n] \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Für $x_n \neq 0$ gilt also

$$[x_0 : \dots : x_n] = \left[\frac{x_0}{x_n} : \dots : \frac{x_{n-1}}{x_n} : 1 \right].$$

Der Punkt $(x_0/x_n, \dots, x_{n-1}/x_n, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ist dabei der Schnittpunkt der durch $[x_0 : \dots : x_n]$ bestimmten Ursprungsgeraden mit der Hyperebene $\{x_n = 1\}$. Die Punkte des $\mathbb{RP}^n$ dieser Form kann man also mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren. Die Punkte der Form $[x_0 : \dots : x_{n-1} : 0]$ entsprechen den Ursprungsgeraden parallel zu $\{x_n = 1\}$; diese bilden einen $\mathbb{RP}^{n-1}$. Als Punktmenge können wir daher schreiben $\mathbb{RP}^n = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{RP}^{n-1}$. Man spricht vom $\mathbb{RP}^{n-1}$ ‘im Unendlichen’.

b.w.

Präsenzaufgabe 2. (a) Zeigen Sie, daß der Raum, der aus D^2 durch Identifikation von x mit $-x$ für alle Randpunkte $x \in S^1 = \partial D^2$ entsteht, homöomorph zur projektiven Ebene $\mathbb{RP}^2$ ist.

(b) Zeigen Sie, daß man die Kleinsche Flasche als Quotientenraum $\mathbb{R}^2/\sim$ auffassen kann, wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben ist durch

$$(x, y) \sim (x + 1, y) \quad \text{und} \quad (x, y) \sim (-x + 1, y + 1).$$

(c) Wir fassen S^1 als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf:

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}.$$

Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \alpha: \quad S^1 \times S^1 &\longrightarrow S^1 \times S^1 \\ (z, w) &\longmapsto (\bar{z}, -w) \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus des 2-Torus $T^2 = S^1 \times S^1$ mit $\alpha \circ \alpha = \text{id}_{T^2}$ ist. Zeigen Sie weiter, daß der Quotientenraum $T^2/x \sim \alpha(x)$ homöomorph zur Kleinschen Flasche ist.

Präsenzaufgabe 3. Sind zwei topologische Räume X, Y homotopieäquivalent, so schreiben wir dies als $X \simeq Y$. Zeigen Sie:

- (i) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$,
- (ii) $D^n \simeq \{0\}$.

Hausaufgabe 1. Ist $f: X \rightarrow Y$ eine injektive Abbildung und $f: X \rightarrow f(X)$ ein Homöomorphismus, wenn man $f(X)$ die durch Y induzierte Topologie gibt, so heißt f eine **Einbettung**. Zeigen Sie:

- (a) Jede stetige und injektive Abbildung eines kompakten Raumes in einen Hausdorff-Raum ist eine Einbettung. Überlegen Sie sich dazu, was man über stetige Bilder von Kompakta und über kompakte Teilmengen von Hausdorff-Räumen aussagen kann.
- (b) Die Abbildung $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ gemäß

$$f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz),$$

wobei S^2 die Einheitssphäre $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet, induziert eine Einbettung von $\mathbb{RP}^2 = S^2/(x, y, z) \sim -(x, y, z)$ in den $\mathbb{R}^4$.

Hausaufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum und $f: S^n \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, daß sich f genau dann zu einer stetigen Abbildung $D^{n+1} \rightarrow X$ fortsetzen läßt, wenn f **nullhomotop** ist, d.h. homotop zu einer konstanten Abbildung.

Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben:

Donnerstag 22.10.26 vor Beginn der Vorlesung oder in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).