WS 2026/27

Prof. Hansjörg Geiges
Norman Thies, M.Sc.

Algebraische Topologie

Übungsblatt 3

Präsenzaufgabe 1. (Lemma 3.1) Rechnen Sie explizit nach, daß

$$\partial_{n-1}(\partial_n(T)) = 0$$

für jeden singulären n-Quader $T\colon\ I^n \to X$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Zeigen Sie außerdem, daß

$$\partial_n(D_n(X)) \subset D_{n-1}(X) \ \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Präsenzaufgabe 2. (a) Es sei

$$0 \to \mathbb{Z}_3 \to G \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \to 0$$

eine exakte Sequenz von abelschen Gruppen und Homomorphismen. Zeigen Sie, daß α ein Isomorphismus ist und G isomorph zu $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_6$. Was gilt, wenn G nicht als abelsch vorausgesetzt wird?

(b) Eine **kurze exakte Sequenz** abelscher Gruppen ist eine exakte Sequenz der Form

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0.$$

Zeigen Sie:

(i) Exaktheit bei A bzw. C ist äquivalent zur Injektivität von α bzw. Surjektivität von β.

(ii) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- Es gibt einen Homomorphismus $\lambda\colon\ C \to B$, so daß $\beta \circ \lambda = \mathrm{id}_C$.
- Es gibt einen Homomorphismus $\mu\colon\ B \to A$, so daß $\mu \circ \alpha = \mathrm{id}_A$.

Unter diesen Bedingungen sagt man, daß die kurze exakte Sequenz **spaltet**. Zeigen Sie weiter, daß dann $B \cong A \oplus C$.

(iii) Ist C eine *freie* abelsche Gruppe, so spaltet jede kurze exakte Sequenz der obigen Form. (Falls Ihnen der allgemeine Fall Schwierigkeiten bereitet, diskutieren Sie zumindest den Fall $C \cong \mathbb{Z}$.)

b.w.

Hausaufgabe 1. (a) Seien N und S die Pole (d.h. zwei fest gewählte Antipodenpunkte) der n-Sphäre S^n, $n \geq 2$. Zeigen Sie mittels des Lebesgueschen Überdeckungssatzes, daß jeder Weg in S^n ein endliches Produkt von Wegen ist, die ganz in $S^n \setminus \{N\}$ oder $S^n \setminus \{S\}$ liegen. Schließen Sie daraus, daß $\pi_1(S^n)$ die triviale Gruppe ist, indem Sie jede Schleife in S^n (an einem gewählten Basispunkt verschieden von N und S) als Komposition von Schleifen schreiben, die jeweils ganz in $S^n \setminus \{N\}$ oder $S^n \setminus \{S\}$ liegen.

(b) Zeigen Sie durch Anheben von Wegen in $\mathbb{R}\mathrm{P}^n = S^n/x \sim -x$ nach S^n und mit (a), daß $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \cong \mathbb{Z}_2$ für $n \geq 2$. Was ist $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^1)$?

Hausaufgabe 2. Eine spaltende kurze exakte Sequenz *nicht-abelscher* Gruppen A, B, C entspricht im allgemeinen nicht einem direkten Produkt, sondern einem sogenannten *semi-direkten* Produkt von A und C. Als Beispiel betrachten wir die **Diedergruppe** D_{2n}, d.h. die Symmetriegruppe eines regelmäßigen n-Ecks. Wir verwenden die Notation C_k für die multiplikativ geschriebene zyklische Gruppe der Ordnung $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(i) D_{2n} wird erzeugt von der Rotation r um $2\pi/n$ und einer Spiegelung s an einer Symmetrieachse in der Ebene des n-Ecks. Weiter besteht D_{2n} genau aus den $2n$ Elementen

$$e, r, \ldots, r^{n-1}, s, rs, \ldots, r^{n-1}s.$$

(ii) Es gilt $sr = r^{-1}s$, wobei $r^{-1} = r^{n-1}$.

(iii) Durch $r^i s^j \mapsto s^j$ ist ein wohldefinierter Homomorphismus $D_{2n} \to C_2$ beschrieben.

(iv) Es gibt eine kurze exakte Sequenz

$$\{e\} \longrightarrow C_n \longrightarrow D_{2n} \longrightarrow C_2 \longrightarrow \{e\},$$

die spaltet.

Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben:
Donnerstag 5.11.26 vor Beginn der Vorlesung oder in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).