Satz 9.1. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) G ist *homologisch einfach zusammenhängend*, d.h. für alle $f \in \mathcal{O}(G)$ und alle geschlossenen Wege γ in G gilt

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

(ii) Geschlossene Wege in G umlaufen keinen Punkt des Komplements von G, d.h. für jeden geschlossenen Weg γ in G und jedes $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$ gilt

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz = 0.$$

("G hat keine Löcher.")

(iii) Jedes $f \in \mathcal{O}(G)$ besitzt eine Stammfunktion.

(iv) Jedes $f \in \mathcal{O}(G)$ mit $f \neq 0$ besitzt einen holomorphen Logarithmus, d.h. es gibt ein $g \in \mathcal{O}(G)$ mit $e^g = f$.

(v) Jedes $f \in \mathcal{O}(G)$ mit $f \neq 0$ besitzt eine holomorphe Quadratwurzel, d.h. es gibt ein $h \in \mathcal{O}(G)$ mit $h^2 = f$.

(vi) G ist einfach zusammenhängend.