SS 2003 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis II

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Für $x, y \in \mathbb{R}$ setze
$$d(x,y) := \arctan|x-y|.$$
Zeigen Sie, daß dadurch eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert wird und daß die offenen Mengen bezüglich dieser Metrik dieselben sind wie bezüglich der Standardmetrik $d_0(x,y) = |x-y|$.

Aufgabe 2. Eine Teilmenge A eines metrischen (später allgemeiner: topologischen) Raumes (M,d) heißt abgeschlossen, falls das Komplement $M \setminus A$ offen ist. Zeigen Sie:

(i) Die Vereinigung endlich vieler und der Durchschnitt unendlich vieler abgeschlossener Mengen sind wieder abgeschlossen. Gilt dies auch für die Vereinigung unendlich vieler abgeschlossener Mengen?

(ii) Falls die Menge M mit der diskreten Metrik versehen wird, so ist jede Teilmenge von M zugleich offen und abgeschlossen.

Gibt es in jedem metrischen Raum Teilmengen, die zugleich offen und abgeschlossen sind?

Aufgabe 3. Sei (M,d) ein metrischer Raum und $Y \subset M$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x \in M$ heißt

- Randpunkt von Y, wenn jede ϵ-Umgebung von x (mindestens) einen Punkt aus Y und einen Punkt aus $M \setminus Y$ enthält. Die Menge der Randpunkte von Y wird mit ∂Y bezeichnet.
- Häufungspunkt von Y, wenn jede ϵ-Umgebung von x unendlich viele Punkte aus Y enthält.

$\overline{Y} := Y \cup \partial Y$ heißt die **abgeschlossene Hülle** von Y. Die Vereinigung der inneren Punkte von Y wird mit $\mathring{Y}$ bezeichnet und heißt das **Innere** von Y.

Zeigen Sie:

(i) ∂Y und $\overline{Y}$ sind abgeschlossen.

(ii) $\overline{Y}$ ist die Vereinigung von Y mit der Menge der Häufungspunkte von Y, und $\mathring{Y} = Y \setminus \partial Y$.

(iii) $\mathring{Y}$ und ∂Y sind disjunkt und
$$\overline{Y} = \mathring{Y} \cup \partial Y.$$

(iv) $\partial Y = \partial(M \setminus Y)$.

(v) Y ist offen genau dann, wenn $Y \cap \partial Y = \emptyset$, und abgeschlossen genau dann, wenn $\partial Y \subset Y$, d.h. $\overline{Y} = Y$.

Aufgabe 4. (a) Geben Sie explizit eine Menge $Y \subset \mathbb{R}^2$ an, so daß die folgenden Mengen alle verschieden sind:
$$Y, \mathring{Y}, \overline{Y}, \mathring{\overline{Y}}, \overline{\mathring{Y}}, \overline{\mathring{\overline{Y}}}, \mathring{\overline{\mathring{Y}}}.$$

(b) Für $M \subset \mathbb{R}^n$ sei
$$d(x,M) := \inf\{|x-y| : y \in M\}$$
der Abstand des Punktes x von M. Für ein $\epsilon > 0$ setze
$$M_\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,M) \leq \epsilon\}.$$
Zeigen Sie: Falls M abgeschlossen ist, so auch M_ϵ. Folgt aus der Abgeschlossenheit von M_ϵ für ein $\epsilon > 0$ die Abgeschlossenheit von M?

Abgabe: Freitag 2.5.2003 bis 13:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft