SS 2003 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis II

Übungsblatt 2

Bemerkung. Die ersten beiden Aufgaben sollen in der ersten Übung besprochen werden; die anderen Aufgaben sind zu dem unten genannten Termin abzugeben.

Aufgabe 1. (a) Seien (M,d) ein metrischer Raum, $f,g\colon M \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Verwenden Sie das Folgenkriterium für Stetigkeit und die Rechenregeln für Grenzwerte von Zahlenfolgen um zu zeigen, daß dann auch die Funktionen $f+g$, λf, $f\cdot g$, f/g (in den Punkten $x \in M$ mit $g(x) \neq 0$), $|f|$, $\min(f,g)$ und $\max(f,g)$ stetig sind.

(b) Ist $f\colon M \to \mathbb{R}$ stetig und $f(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in M$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $f(x) > 0$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$.

Aufgabe 2. Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorrraum. Seien $(x_n),(y_n) \subset V$ mit $\lim x_n = a$ und $\lim y_n = b$, sowie $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ mit $\lim \lambda_n = \lambda$. Dann gilt

(i) $(x_n + y_n)$ ist konvergent mit $\lim(x_n + y_n) = a + b$.

(ii) $(\lambda_n x_n)$ ist konvergent mit $\lim(\lambda_n x_n) = \lambda a$.

Aufgabe 3. (Französische Eisenbahnmetrik.) Sei (M,d) ein metrischer Raum und P(aris) ein fester Punkt in M. Man definiere $d_P(x,x) = 0$ und $d_P(x,y) = d(x,P) + d(P,y)$ für $x,y \in M$, $x \neq y$. Zeigen Sie, daß d_P auf M eine Metrik definiert. Erklären Sie den Namen dieser Metrik.

Sei (x_n) eine Folge in M. Zeigen Sie (bezüglich der Metrik d_P): $\lim x_n = a \neq P$ genau dann, wenn $x_n = a$ für fast alle n; $\lim x_n = P$ genau dann, wenn $d(x_n, P) \to 0$.

Machen Sie sich die Aufgabe evtl. erst am $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Metrik d klar.

Aufgabe 4. (a) In einem metrischen Raum (M,d) hängt die Konvergenz von Punktfolgen nur von den offenen Mengen in M ab, was wie folgt zu verstehen ist: Eine Folge (x_n) in M ist konvergent gegen $a \in M$ genau dann, wenn es zu jeder offenen Menge $U \subset M$ mit $a \in U$ ein $n_0 = n_0(U)$ gibt, so daß $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$.

(Zur Erinnerung: Unbewiesene Aussagen wie diese sind zu lesen als 'Zeigen Sie, daß...')

(b) Teil (a) motiviert folgende Definition: Zwei Metriken d_1, d_2 auf einer Menge M heißen äquivalent, falls die offenen Mengen bezüglich d_1 genau die offenen Mengen bezüglich d_2 sind.

(i) Falls es positive Konstanten α, β gibt mit

$$\alpha\, d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq \beta\, d_2(x,y) \quad \forall x,y \in M,$$

dann sind d_1 und d_2 äquivalent.

(ii) Auf dem $\mathbb{R}^n$ definiere

$$d_1(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2}, \quad d_2(x,y) = \max\{|x^i - y^i|\colon i = 1,\dots,n\},$$

wo $x = (x^1,\dots,x^n)$ und $y = (y^1,\dots,y^n)$ (Indizes, nicht Potenzen!). Zeigen Sie (mittels (i)), daß d_1 und d_2 äquivalente Metriken sind. Skizzieren Sie die ε-Umgebungen bezüglich dieser Metriken (in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$).

(iii) Allgemeiner: Falls es in 0 stetige Funktionen $f, g\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ gibt mit $f(0) = g(0) = 0$ und

$$d_2(x,y) \le f(d_1(x,y)), \quad d_1(x,y) \le g(d_2(x,y)) \ \forall x,y \in M,$$

dann sind d_1 und d_2 äquivalente Metriken auf M.

Aufgabe 5. (a) Seien $(M_1, d_1), \dots, (M_k, d_k)$ metrische Räume. Dann ist auch der Produktraum $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ ein metrischer Raum mit $d(x,y) := \max\{d_i(x^i, y^i)\colon i = 1, \dots, k\}$, wo $x = (x^1, \dots, x^k)$ und $y = (y^1, \dots, y^k)$.

(b) Eine Folge (x_n) in (M,d) ist konvergent genau dann, wenn die Komponentenfolgen $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ in (M_i, d_i) konvergent sind ($i = 1, \dots, k$), wo $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^k)$.

(c) Seien (X, d_X) ein weiterer metrischer Raum und $f_i\colon X \to M_i$ Abbildungen, sowie $f = (f_1, \dots, f_k)\colon X \to M_1 \times \cdots \times M_n$. Dann ist f genau dann stetig, wenn alle Komponentenabbildungen f_i, $i = 1, \dots, k$ stetig sind.

Aufgabe 6. (a) Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum (und damit, wie in der Vorlesung gesehen, in kanonischer Weise ein metrischer Raum). Dann sind die Addition auf V

$$\text{add: } V \times V \longrightarrow V, \ (u,v) \longmapsto u + v$$

und die Skalarmultiplikation auf V

$$\text{skal: } \mathbb{R} \times V \longrightarrow V, \ \ (\lambda, v) \longmapsto \lambda v$$

stetige Abbildungen. Dabei sind $V \times V$ und $\mathbb{R} \times V$ als metrische Räume wie in Aufgabe 5 aufzufassen. Hinweis: Aufgabe 2.

(b) Seien weiter (M,d) ein metrischer Raum und $f, g\colon M \to V$ sowie $\lambda\colon M \to \mathbb{R}$ stetige Abbildungen. Dann sind auch $f+g\colon M \to V$ und $\lambda f\colon M \to V$ stetige Abbildungen, wo $(f+g)(m) = f(m) + g(m)$ und $(\lambda f)(m) = \lambda(m) f(m)$ für $m \in M$.

(c) Lineare Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sind stetig.

(d) Sei $V = C^\infty([0,1])$ versehen mit der Supremumsnorm. Dann ist die Abbildung $V \to V$, $f \mapsto f'$ linear, aber nicht stetig. Hinweis: Betrachten Sie z.B. die Funktionenfolge $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$ in V.

Aufgabe 7. Auf dem Vektorraum $V = C^1([a,b])$ der (mindestens) einmal stetig differenzierbaren Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definiere

$$\|f\|_{C^1} = \sup\{|f(x)| + |f'(x)|\colon x \in [a,b]\}.$$

(a) $\|.\|_{C^1}$ ist eine Norm auf V, mit der V zu einem Banachraum wird.

(b) Sei $V' = C^0([a,b])$ der Vektorraum der stetigen Funktionen auf $[a,b]$, versehen mit der Supremumsnorm. Bezüglich dieser Normen ist die Abbildung $V \to V'$, $f \mapsto f'$ stetig.

Abgabe: **Mittwoch** 7.5.2003 bis 17:00 Uhr im Briefkasten gegenüber der Fachschaft

Bitte den Namen des Übungsgruppenleiters angeben!