SS 2003 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis II

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Sei A abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes (M,d) und $f\colon A \to A$ eine Abbildung. Es gebe eine Konstante $\lambda \in [0,1)$, so daß

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x,y)$$

für alle $x, y \in A$.

Zeigen Sie:

(a) Es gibt höchstens ein $a \in A$ mit $f(a) = a$.

(b) Ein solches a existiert: Für jedes $x_0 \in A$ konvergiert die durch

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N},$$

definierte Folge in A, und der Grenzwert a erfüllt $f(a) = a$.

Eine Abbildung $f\colon (M_1, d_1) \to (M_2, d_2)$ zwischen metrischen Räumen heißt **gleichmäßig stetig**, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß $d_2(f(x), f(y)) \leq \epsilon$ für alle $x, y \in M_1$ mit $d_1(x,y) < \delta$.

Aufgabe 2. Betrachten Sie das Standard-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Zeigen Sie:

(a) Für jedes $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ist die Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle x, y_0 \rangle$ gleichmäßig stetig.

(b) Gilt $\langle x, y_0 \rangle = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| = 1$, so ist $y_0 = 0$.

(c) Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ **dicht** in $\mathbb{R}^n$, d.h. jeder Punkt in $\mathbb{R}^n$ ist Limes einer Folge in E. Für alle $x \in E$ gelte $\langle x, y_0 \rangle = 0$. Dann ist $y_0 = 0$.

Aufgabe 3. Seien (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrische Räume und M_1 kompakt. Dann ist jede stetige Abbildung $f\colon M_1 \to M_2$ gleichmäßig stetig.

Aufgabe 4. (a) In einem metrischen Raum ist ein Häufungspunkt einer Folge (x_n) stets Grenzwert einer Teilfolge von (x_n).

(b) Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig.

Abgabe: Mittwoch 14.5.2003 bis 16:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft.

Bitte den Namen des Übungsgruppenleiters auf den Zettel schreiben.