SS 2003 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis II

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. (a) Sei

$$X = \{(x, \sin\frac{1}{x} : 0 < x < \infty\} \cup \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

versehen mit der von $\mathbb{R}^2$ induzierten Topologie.

Dann ist X zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

(b) Sei X eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ (mit der von $\mathbb{R}^n$ induzierten Topologie). Dann ist X zusammenhängend genau dann, wenn X wegzusammenhängend ist.

Hinweis: Sei $x_0 \in X$ ein fest gewählter Punkt und $A \subset X$ die Menge der Punkte, die sich durch einen Weg in X mit x_0 verbinden lassen. Zeigen Sie, daß A offen und abgeschlossen in X ist.

Aufgabe 2. (a) Eine ebene Kurve γ sei dargestellt in Polarkoordinaten durch die Gleichung $r = f(\phi)$, $\alpha \leq \phi \leq \beta$ mit f stetig differenzierbar. Dann ist die Bogenlänge von γ gegeben durch

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{f^2(\phi) + (f')^2(\phi)}\, d\phi.$$

(b) Berechnen Sie die Länge des im ersten Quadranten liegenden Anfangsstückes der Archimedischen Spirale $r = \phi$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$.

Aufgabe 3. Skizzieren Sie die folgenden Kurven und berechnen Sie ihre Längen:

(a) $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$ bei einem vollen Umlauf (Astroide).

(b) $x = t - \sin t$ und $y = 1 - \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (Zykloide). Dies ist die Bahn eines Punktes auf der Peripherie eines Kreises vom Radius 1, der auf der x-Achse abrollt.

Aufgabe 4. Ein Faden wird auf der Peripherie des Einheitskreises im Uhrzeigersinn aufgewickelt, wobei sein Ende im Punkt $(1, 0)$ liegen möge. Wird der Faden so wieder abgewickelt, daß er immer gespannt bleibt, so beschreibt das Fadenende einen Weg von der Form einer sich gegen den Uhrzeigersinn öffnenden Spirale, der sogenannten **Evolvente** des Kreises.

(a) Die Kreisevolvente hat die Parameterdarstellung

$$\gamma(t) = (\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t),$$

wobei t die Länge des abgewickelten Fadens ist.

(b) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kreisevolvente als Funktion von t.

Abgabe: Mittwoch 21.5.2003 bis 17:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft.

Bitte den Namen des Übungsgruppenleiters auf den Zettel schreiben.