SS 2003 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis II

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. (a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß f überall zweimal partiell differenzierbar ist und berechnen Sie explizit die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) \text{ und } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0).$$

Gilt $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$? Ist f im Nullpunkt stetig?

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} y - x^2 & \text{für } y \geq x^2 \\ \frac{y^2}{x^2} - y & \text{für } 0 \leq y < x^2. \end{cases}$$

und

$$f(x,-y) = -f(x,y) \text{ für } y > 0.$$

Zeigen Sie: f ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar. Ist f überall stetig partiell differenzierbar?

Aufgabe 2. (a) Eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sei bezüglich der kanonischen Basen durch eine $(m \times n)$-Matrix

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

gegeben. Dann gilt

$$\|Ax\| \leq \sqrt{nm} \cdot \max_{i,j} |a_{ij}| \cdot \|x\|$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
Hinweis: Wende Cauchy-Schwarz auf $\sum_j a_{ij} x_j$ an.

(b) Seien V, W normierte Vektorräume und $L : V \to W$ eine lineare Abbildung. Diese Abbildung L ist stetig genau dann, wenn es eine Konstante $C \in \mathbb{R}^+$ gibt, so daß

$$\|L(x)\| \leq C\|x\|$$

für alle $x \in V$.

Insbesondere sehen wir mit (a) erneut (vgl. Übungsblatt 2), daß lineare Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen stetig sind.

Aufgabe 3. Sei G eine offene Menge in $\mathbb{R}^3$ und $v = (v_1, v_2, v_3) : G \to \mathbb{R}^3$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld. Die **Rotation** von v ist das Vektorfeld

$$\operatorname{rot} v := \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)$$

(formal $\operatorname{rot} v = \nabla \times v$). Seien v und $f : G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. b.w.

Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$

(b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = 0$

(c) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} v) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} v) - (\triangle v_1, \triangle v_2, \triangle v_3)$, wobei $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ der **Laplace Operator** ist.

Dabei darf verwendet werden, daß für eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ gilt $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$.

Aufgabe 4. Sei $v : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige vektorwertige Funktion auf $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\left\| \int_a^b v(t)\, dt \right\| \leq \int_a^b \|v(t)\|\, dt,$$

wobei $\int_a^b (v_1(t), \dots, v_n(t))\, dt$ definiert ist als

$$\left(\int_a^b v_1(t)\, dt, \dots, \int_a^b v_n(t)\, dt \right).$$

Abgabe: Mittwoch 28.5.2003 bis 17:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft

Bitte Übungsgruppenleiter auf den Zettel schreiben!