Analysis II

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar und homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, d.h. $f(tx) = t^\alpha f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt

$$\langle \operatorname{grad} f(x), x\rangle = \alpha f(x).$$

Aufgabe 2. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

(a) Der Gradient von f steht senkrecht auf den Niveaumengen $f^{-1}(c)$ von f, d.h. für eine differenzierbare Kurve $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to f^{-1}(c)$ gilt

$$\langle \operatorname{grad} f(\gamma(0)), \gamma'(0)\rangle = 0.$$

(b) Sei U wegzusammenhängend im Sinne, daß zu je zwei Punkten $a, b \in U$ eine <u>differenzierbare</u> Kurve $\gamma : [0,1] \to U$ existiert mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$. Ist $\operatorname{grad} f \equiv 0$ auf U, so ist f konstant auf U.

(c) Für die stetig partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gelte

$$\operatorname{grad} f(x) = \lambda(x) \cdot x$$

mit einer reellwertigen Funktion λ. Dann hängt f nur von $r = \|x\|$ ab, d.h. auf jeder Sphäre $S_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r\}$ ist f konstant.

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion, gegeben in Polarkoordinaten als $f(r, \varphi)$ mit $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$.

(a) Es gilt

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2},$$

wo $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

(b) Jede Linearkombination f der Funktionen $r^n \cos(n\varphi)$ und $r^n \sin(n\varphi)$ mit $n \in \mathbb{Z}$ erfüllt die Laplace-Gleichung $\triangle f = 0$.

Aufgabe 4. (a) Seien X ein topologischer Raum, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : X \times [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann definiert

$$G(x, t) = \int_a^t f(x, \tau)\, d\tau$$

eine stetige Funktion $X \times [a, b] \to \mathbb{R}$.

(b) Sei f wie in (a) mit $X = [c, d] \subset \mathbb{R}$. Weiter existiere die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ und sie sei stetig auf $[c, d] \times [a, b]$. Dann ist auch

$$G(x, t) = \int_a^t f(x, \tau)\, d\tau$$

auf $[c, d] \times [a, b]$ stetig partiell differenzierbar nach x mit

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, t) = \int_a^t \frac{\partial f}{\partial x}(x, \tau)\, d\tau.$$

b.w.

(c) Sei f wie in (b) und $h : [c,d] \to [a,b]$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist die Funktion $x \mapsto G(x, h(x))$ differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dx} G(x, h(x)) = f(x, h(x)) \cdot h'(x) + \int_a^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, \tau)\, d\tau.$$

Bitte, beachten Sie, daß die Übungspunkte ab Blatt 5 wieder in die Klausurwertung eingehen:

`http://www.mi.uni-koeln.de/~geiges/vorlesungSS03.html`

Abgabe: Mittwoch 4.6.2003 bis 17:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft

$\boxed{\text{Bitte Übungsgruppenleiter auf den Zettel schreiben!}}$