SS 2003 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis II

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^a t^2 e^{-t}\, dt$$

durch Differenzieren eines geeigneten Integrals der Form

$$\int_0^a f(x,t)\, dt.$$

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mittels partieller Integration.

Aufgabe 2. Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß die Integrale

$$F(y) = \int_0^1 g(x,y)\, dx \text{ und } f(y) = \int_0^1 D_2 g(x,y)\, dx$$

definiert sind und daß die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Gilt $F'(0) = f(0)$?

Aufgabe 3. Seien $u, v \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Identifiziere $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ via $(x,y) \mapsto x+iy$ und definiere $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Zeigen Sie:

(i) Die Funktion f ist holomorph[1] genau dann, wenn die **Cauchy-Riemann Differentialgleichungen**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

gelten.

(ii) In diesem Falle gilt $\triangle u = \triangle v = 0$.

(iii) Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist $u(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ Realteil einer holomorphen Funktion? Bestimmen Sie diese holomorphe Funktion.

Aufgabe 4. Die Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ sei homogen vom Grad 2, d.h. $f(tx) = t^2 f(x)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß f eine quadratische Form ist, d.h. es existiert eine reelle $(n \times n)$-Matrix A, so daß

$$f(x) = x^t A x.$$

Bestimmen Sie die Matrix A.

Abgabe: Mittwoch 18.6.2003 bis 17:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft

Bitte Übungsgruppenleiter auf den Zettel schreiben!

[1] Zur Erinnerung: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist holomorph genau dann, wenn es zu jedem $z_0 \in \mathbb{C}$ eine in z_0 stetige Funktion $\triangle(z)$ gibt mit $f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \cdot \triangle(z)$.