SS 2003 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis II

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. (a) Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der folgenden Funktionen:

(i) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

(ii) $f(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(iii) $f(x,y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion. Warum heißt die dadurch im $\mathbb{R}^3$ gegebene Fläche **Affensattel**?

(b) Das folgende Beispiel von Peano zeigt, daß eine Funktion auf $\mathbb{R}^2$ in einem Punkt p kein lokales Minimum haben muß, selbst wenn ihre sämtlichen Beschränkungen auf die Geraden durch p dort lokale Minima haben:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

Dann gilt

(i) Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$, $(a,b) \neq (0,0)$, hat die Funktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi(t) := f(at, bt)$ in $t = 0$ ein isoliertes lokales Minimum.

(ii) Die Funktion f hat in $(0,0)$ kein lokales Minimum. Wo ist $f > 0$, wo $f < 0$?

Aufgabe 2 (Eindeutigkeit der Taylorentwicklung). Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in G$. In einer Umgebung von a gelte

$$f(a+x) = \sum_{|\nu| \leq k} c_\nu x^\nu + o(\|x\|^k)$$

und

$$f(a+x) = \sum_{|\nu| \leq k} \tilde{c}_\nu x^\nu + o(\|x\|^k).$$

Dann gilt $c_\nu = \tilde{c}_\nu$ für alle $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\nu| \leq k$.

Aufgabe 3. Im $\mathbb{R}^n$ seien k Punkte $a_1, \ldots, a_k$ gegeben. Dann hat die Summe der Abstandsquadrate

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} \|x - a_j\|^2$$

ein Minimum im Schwerpunkt $x_0 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} a_j$ des Punktesystems.

Aufgabe 4. Sei $G \subset \mathbb{R}^4$ eine offene, **konvexe Menge**, d.h. mit $a, b \in G$ gilt auch $(1-t)a + tb \in G$ für alle $t \in [0,1]$. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ heißt **konvex** auf U, falls gilt

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

für alle $a, b \in G$, $t \in [0,1]$.

Sei $f \in C^2(G)$ eine konvexe Funktion. Dann gilt für jeden Punkt $a \in G$

$$f(x) \geq f(a) + d_a f(x - a)$$

für alle $x \in G$. Was bedeutet dies geometrisch?

Abgabe: Mittwoch 25.6.2003 bis 17:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft

Bitte Übungsgruppenleiter auf den Zettel schreiben!