SS 2003 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis II

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Diskutieren Sie die Höhenlinien $F^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$, der Funktion

$$F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xye^{-x-y}. \end{array}$$

Untersuchen Sie, in welchen Rechtecken $I \times J \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ sich die Mengen

$$\{(x,y) \in I \times J : F(x,y) = c\}$$

in in der Form

$$\{(x,y) \in I \times J : y = g(x)\}$$

oder

$$\{(x,y) \in I \times J : x = h(y)\}$$

mit differenzierbaren Funktionen $g : I \to J$ bzw. $h : J \to I$ darstellen lassen.

Aufgabe 2. (a) Wo ist durch

$$x^3 + y^3 + 3(x^2 + y^2)z + z^3 + 5 = 0$$

eindeutig eine Funktion $z(x,y)$ definiert? Bestimmen Sie die lokalen Extrema dieser Funktion $z(x,y)$.

(b) Seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + z^2$, und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = xy$, gegeben. Zeigen Sie, daß die Schnittmenge

$$C = f^{-1}(5) \cap g^{-1}(1)$$

um jeden Punkt $(x,y,0) \in C$ in der Form $x = x(z)$, $y = y(z)$ geschrieben werden kann. Finden Sie eine explizite Darstellung dieser Funktionen $x(z), y(z)$ um den Punkt $(1,1,0) \in C$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + uy + e^v &= 0 \\ 2x + u^2 - uv &= 5 \end{aligned}$$

in einer Umgebung von $(x,y) = (2,5)$ durch eine C^1-Abbildung

$$(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$$

mit $u(2,5) = -1$ und $v(2,5) = 0$ aufgelöst werden kann. Berechnen Sie die Ableitung dieser Abbildung im Punkt $(x,y) = (2,5)$.

Aufgabe 4. Sei $g : V \to V$ eine kontrahierende Abbildung eines vollständigen normierten Vektorraumes V, d.h. es gebe ein $\lambda \in [0,1)$ mit

$$\|g(x) - g(x')\| \leq \lambda \|x - x'\| \text{ für alle } x, x' \in V.$$

Zeigen Sie: Die Abbildung $f : V \to V$ definiert durch $f(x) = x + g(x)$ ist ein Homöomorphismus, d.h. eine stetige, bijektive Abbildung, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist.

Hinweis: Zum Beweis der Surjektivität betrachten Sie die Abbildung

$$\Phi_y(x) = y + x - f(x).$$

Abgabe: Mittwoch 2.7.2003 bis 17:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft

Bitte Übungsgruppenleiter auf den Zettel schreiben!