SS 2003 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis II

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n, \text{ für } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_0^+$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n - 1 = 0$$

ihr Minimum im Punkt $(1, \dots, 1)$ annimmt.

Begründen Sie sorgfältig, warum der Kandidat für ein lokales Extremum tatsächlich ein Minimum ist.

(b) Leiten Sie aus (a) die Ungleichung

$$\sqrt[n]{y_1 \cdot \ldots \cdot y_n} \leq \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}$$

für alle $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}_0^+$ her. Die linke Seite dieser Ungleichung heißt **geometrisches Mittel** von $y_1, \dots, y_n$, die rechte **arithmetisches Mittel**.

Aufgabe 2. Der **Brocardsche Winkel** ω (benannt nach *Henri Brocard*, 1845-1922) eines Dreiecks in der euklidischen Ebene mit Winkeln $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, ist bestimmt durch

$$\cot \omega = \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma.$$

Zeigen Sie, daß $\omega \leq \pi/6$.

Zusatzaufgabe 1. (a) Seien die Ecken des Dreiecks in Aufgabe 2 mit A, B, C bezeichnet. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt P derart, daß die Winkel $\sphericalangle BAP$, $\sphericalangle CBP$ und $\sphericalangle ACP$ gleich sind.

(b) Zeigen Sie, daß der Winkel aus (a) als Lösung der Gleichung in Aufgabe 2 erhalten wird.

Aufgabe 3. Es seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ und $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = q^n$. Zeigen Sie, daß

$$(1 + x_1) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n) \geq (1 + q)^n,$$

wobei die Gleichheit nur für $x_1 = \ldots = x_n = q$ eintritt.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß die Gleichung

$$y^2 + xz + z^2 - e^{xz} = 1$$

in einer Umgebung des Punktes $(x, y, z) = (0, -1, 1)$ in der Form $z = g(x, y)$ eindeutig auflösbar ist. Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von g um den Punkt $(x, y) = (0, -1)$ bis zu den Gliedern zweiter Ordnung. b.w.

Zusatzaufgabe 2. Der Satz über implizite Funktionen folgt aus dem Satz von der lokalen Umkehrbarkeit.

Am 4.Juli findet ab 19:00 Uhr auf dem Parkplatz des Mathematischen Instituts das diesjährige Sommerfest statt.

Abgabe: Mittwoch 9.7.2003 bis 17:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft

$\boxed{\text{Bitte Übungsgruppenleiter auf den Zettel schreiben!}}$