SS 2003 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis II

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = 3t^2 x$$

auf $\mathbb{R}$ mit Anfangswert $\alpha(0) = x_0$ mittels des Iterationsverfahrens aus dem Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes, angewandt auf die Abbildung

$$(\Phi(\alpha))(t) = x_0 + \int_0^t 3\tau^2 \alpha(\tau)\, d\tau.$$

Aufgabe 2. (a) Bestimmen Sie die Lösung α der Differentialgleichung

$$\ddot{x}x - \dot{x}x - \dot{x}^2 = 0$$

mit $\alpha(0) = x_0 > 0$, $\dot{\alpha}(0) = v_0 > 0$.

Hinweis: Substituieren Sie $y = \dot{x}/x$.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen auf $\mathbb{R}$:

(i) $\dot{x} = e^t \cos x$

(ii) $\dot{x} = \frac{1}{x}\sqrt{1-x^2}, \quad 0 < x < 1$

Aufgabe 3. (a) Sei $h : [a, b) \to \mathbb{R}^+$ eine stetige Funktion ($b = \infty$ zugelassen) derart, daß

$$\int_a^b \frac{1}{h(x)}\, dx$$

divergiert. Dann gibt es für jedes $x_0 \in [a, b)$ eine streng monoton wachsende Lösung $\alpha : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $\dot{x} = h(x)$ mit $\alpha(0) = x_0$, und es gilt $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = b$.

(b) Die Differentialgleichung $\ddot{x} = g - \rho\dot{x}^\beta$ (g=Erdbeschleunigung, β, ρ positive Konstanten) beschreibt einen durch Reibung gebremsten Fall eines Körpers im Schwerefeld der Erde.

Zeigen Sie: Es gibt auf $\mathbb{R}_0^+$ eine Lösung α mit $\alpha(0) = 0$, $\dot{\alpha}(0) = 0$ und $\ddot{\alpha} \geq 0$. Diese hat die "Endgeschwindigkeit" $v_\infty := \lim_{t\to\infty} \dot{\alpha}(t) = (g/\rho)^{1/\beta}$. Berechnen Sie die Lösung explizit für $\beta = 1$ und $\beta = 2$.

Aufgabe 4. (a) Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = -tx \log x$ mit $\alpha(0) = x_0 > 1$. Ohne α zunächst explizit zu berechnen, zeigen Sie: α existiert und ist eindeutig bestimmt, das maximale Lösungsintervall ist $I = \mathbb{R}$, auf $\mathbb{R}_0^-$ wächst α streng monoton, auf $\mathbb{R}_0^+$ fällt α streng monoton, und α erfüllt die Ungleichung $1 < \alpha(t) \leq x_0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Diskutieren Sie das entsprechende Problem für $0 < x_0 < 1$.

(b) Berechnen Sie explizit die Lösung der Differentialgleichung aus (a).

Die Scheinklausur findet am 26.Juli von 9:00-12:00 Uhr in der Aula I des Hauptgebäudes statt. Die Nachschreibklausur wird am 25.September im Kurt-Alder-Hörsaal in der Chemie geschrieben.

Abgabe: Mittwoch 16.7.2003 bis 17:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft

Bitte Übungsgruppenleiter auf den Zettel schreiben!