Prof. Dr. P. Littelmann
Dr. G. Fourier

Übungen zur Mathematik für Physiker 2

Aufgabe 1 (**5 Punkte**) Sei $\{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Das *Kreuzprodukt* ist die schiefsymmetrische (d.h. $v \times w = -w \times v$) bilineare Abbildung

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

definiert durch

$$e_1 \times e_2 = e_3 \ ; \ e_2 \times e_3 = e_1 \ ; \ e_3 \times e_1 = e_2.$$

Zeigen Sie, dass für alle $v, w, z \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\langle v \times w, z \rangle = det(v, w, z).$$

Aufgabe 2 (**5 Punkte**) Es seien $w_1 = (0,1,1,1), w_2 = (1,0,1,1)$ und $w_3 = (1,1,0,1)$ drei Vektoren und U der von den Vektoren aufgespannte Unterraum im $\mathbb{R}^4$. Orthonormalisieren Sie die Basis $\{w_1, w_2, w_3\}$ von U mit dem Erhard-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren.

Aufgabe 3 (**5 Punkte**) Seien $v, w \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt:

$\{v, w, v \times w\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$ genau dann wenn $\{v, w\}$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 4 (**5 Punkte**) Sei $\mathbf{b}$ die folgende Bilinearform auf dem $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{b}((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = 2x_1x_2 + 2y_1y_2 + 2z_1z_2 - x_1y_2 - x_2y_1$$

1. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von $\mathbf{b}$ bezüglich der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$.
2. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von $\mathbf{b}$ bezüglich der folgenden Basis:

$$\{a_1 = (1,1,0) \ ; \ a_2 = (1,-1,0) \ ; \ a_3 = (0,0,1)\}.$$

3. Zeigen oder widerlegen Sie: Die Bilinearform $\mathbf{b}$ definiert ein Skalarprodukt.