

Übungen zur Mathematik für Physiker 2

Aufgabe 1 (5 Punkte) Gegeben sei die Sphäre

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

sowie die beiden Parametrisierungen

$$k(x, y) := (\cos x \cos y, \cos x \sin y, \sin x) \text{ für } (x, y) \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi),$$

$$s(x, y) := \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} (2x, 2y, x^2 + y^2 + 1) \text{ für } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Man nennt k die Parametrisierung in Kugelkoordinaten und s die Parametrisierung durch stereographische Projektion.

1. Zeigen Sie, dass k und s Teilmengen von S^2 parametrisieren. Welche Teilmengen sind dies?
2. Zeigen Sie, dass beide Parametrisierungen Immersionen sind, d.h. $D_p k$ und $D_p s$ besitzen vollen Rang ($= 2$) für alle p im jeweiligen Definitionsbereich.

Aufgabe 2 (5 Punkte) Sei $M := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_1^2 x_2\}$.

1. Zeigen Sie, dass M eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.
2. Geben Sie eine Karte $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ an.

Aufgabe 3 (5 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x, y, u, v) = (z\bar{w} + \bar{z}w, i\bar{z}w - z\bar{w}, |z|^2 - |w|^2),$$

dabei ist $z = x + iy$ und $w = u + iv$. Zeigen Sie

1. Für alle $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ ist das Urbild $f^{-1}(p)$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$.
2. Die Einschränkung $f|_{S^3}$ bildet S^3 surjektiv auf S^2 ab.

Aufgabe 4 (5 Punkte) Zeigen Sie: Für $a > 0, b > 0$ ist

$$M := \{(a \cos t, b \sin t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$. Geben Sie einen Atlas an.