Prof. Dr. P. Littelmann
Dr. G. Fourier

Blatt 11
Abgabe: 14.07. in den Übungen

Übungen zur Mathematik für Physiker 2

Aufgabe 1 (5 Punkte) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass U genau dann offen und zusammenhängend ist wenn U offen und wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte) Auf dem $\mathbb{R}^3$ sei folgende 2-Form gegeben

$$\omega = 2xzdy \wedge dz + dz \wedge dx - (z^2 + e^x)dx \wedge dy.$$

Zeigen Sie, dass $d\omega = 0$ gilt und bestimmen Sie eine stetig differenzierbare 1-Form η auf dem $\mathbb{R}^3$ mit $d\eta = \omega$.

Aufgabe 3 (5 Punkte) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, zeigen Sie

1. Die 1-Formen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in V^*$ sind genau dann linear unabhängig wenn

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_r \neq 0$$

2. Eine k-Form $\omega \in \bigwedge^k V^*$ heisst zerlegbar, falls $\omega = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$ für geeignete $\alpha_i \in V^*$, zeigen Sie
   (a) Für dim $V \leq 3$ ist jede 2-Form zerlegbar.
   (b) Sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in V^*$ linear unabhängig, dann ist $\alpha_1 \wedge \alpha_2 + \alpha_3 \wedge \alpha_4$ nicht zerlegbar.

Aufgabe 4 (5 Punkte) Geben Sie zur 1-Form ω ein τ mit $d\tau = \omega$ an, falls es existiert.

1. $\omega = 3x^2y^2dx + 2x^3ydy$
2. $\omega = (y^3 + 4)dx - (x^5 + 1)dy$