Prof. Dr. P. Littelmann
Dr. G. Fourier

Blatt 2
Abgabe: 05.05. in den Übungen

Übungen zur Mathematik für Physiker 2

Aufgabe 1 (**5 Punkte**) Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob f in $(0,0)$ stetig, partiell differenzierbar, stetig partiell differenzierbar ist.

Aufgabe 2 (**5 Punkte**) Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-4y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, diese Funktion also nicht zweimal stetig partiell differenzierbar in $(0,0)$ ist.

Aufgabe 3 (**5 Punkte**) Seien D eine offene Menge im $\mathbb{R}^3$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar und $v = (v_1, v_2, v_3) : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig partiell differenzierbares Vektorfeld. Die **Rotation** von v ist das Vektorfeld

$$\mathrm{rot} v := \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) = 0$ und $\mathrm{div}(\mathrm{rot} f) = 0$.

Aufgabe 4 (**5 Punkte**) Sei $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left(x_1 e^{\cos(x_3)} + x_4 x_1, \sin(x_1 \cos(x_2 \sin(x_3 \cos(x_4)))), x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_1x_2x_3x_4 \right)$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f im Punkt (x_1, x_2, x_3, x_4).