Prof. Dr. P. Littelmann
Dr. G. Fourier

Blatt 4
Abgabe: 19.05. in den Übungen

Übungen zur Mathematik für Physiker 2

Aufgabe 1 (**5 Punkte**) Bestimmen Sie für die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

die Eigenwerte und eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

Aufgabe 2 (**5 Punkte**) Sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen den Vektorräumen V, W und $v_1, \ldots, v_k \in V$. Zeigen Sie

Wenn $f(v_1), \ldots, f(v_k)$ linear unabhängig $\Rightarrow v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig.

Aufgabe 3 (**5 Punkte**) Untersuchen Sie folgende Matrizen aus dem $\mathbb{R}^{n\times n}$ auf Diagonalisierbarkeit und Trigonalisierbarkeit.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4 (**5 Punkte**) Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein unitärer Vektorraum und $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ die induzierte Norm. Zeigen Sie, dass

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\left(||v+w||^2 - ||v-w||^2 + i||v+iw||^2 - i||v-iw||^2\right)$$

für alle $v, w \in V$.