Prof. Dr. P. Littelmann
Dr. G. Fourier

Blatt 5
Abgabe: 02.06. in den Übungen

Übungen zur Mathematik für Physiker 2

Aufgabe 1 (**5 Punkte**) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix und sei $\lambda \neq \pm 1$ ein komplexer Eigenwert von A. Sei $z^t = (z_1, \ldots, z_n)^t \in \mathbb{C}^n$ ein dazugehöriger komplexer Eigenvektor. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{n} z_k^2 = 0$.

Aufgabe 2 (**5 Punkte**)

1. Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Zeigen Sie, dass $1, A, A^2$ linear abhängig in $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ sind.

2. Sei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Zeigen Sie, dass $1, A, A^2, A^3$ linear abhängig in $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ sind.

Aufgabe 3 (**5 Punkte**) Sei $\mathbb{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$. Wir schreiben die Vektoren des Dualraums $(\mathbb{R}^3)^*$ als Zeilenvektoren, dann ist

$$\mathbb{E}^* = \{e_1^* = (1,0,0), e_2^* = (0,1,0), e_3^* = (0,0,1)\} \subset (\mathbb{R}^3)^*$$

die duale Basis zu $\mathbb{E}$. Die Vektoren in

$$\mathbb{B} = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

1. Bestimmen Sie die duale Basis $\mathbb{B}^*$, und beschreiben Sie die Elemente aus $\mathbb{B}^*$ als Linearkombination der e_1^*, e_2^*, e_3^*.

2. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ der Unterraum aufgespannt von b_1 und sei

$$U^\perp = \{f \in (\mathbb{R}^3)^* \mid f(u) = 0 \,\forall\, u \in U\}.$$

Welche Bedingung müssen die Koeffizienten a, b, c von $f = ae_1^* + be_2^* + ce_3^*$ erfüllen, damit $f \in U^\perp$ gilt?

Aufgabe 4 (**5 Punkte**) Sei F ein selbstadjungierter Endomorphimus eines unitären Vektorraums und es existiere ein $n \geq 0$, so dass $F^n = 0 \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie, dass $F = 0$.