Prof. Dr. P. Littelmann
Dr. G. Fourier

Blatt 6
Abgabe: 09.06. in den Übungen

Übungen zur Mathematik für Physiker 2

Aufgabe 1 (**5 Punkte**) Sei

$$l_\infty := \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid x_k \in \mathbb{C} \text{ und } |\sup_{k\in\mathbb{N}}(x_k)| < \infty\}.$$

Zeigen Sie, dass l_∞ mit

$$||x||_\infty := |\sup_{k\in\mathbb{N}}(x_k)|$$

ein Banachraum ist.

Aufgabe 2 (**5 Punkte**)
Sei $p \in [1, \infty)$ und

$$l_p := \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid x_k \in \mathbb{C} \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty\}.$$

Zeigen Sie, dass l_p mit

$$||x||_p := (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$$

ein Banachraum ist.

Aufgabe 3 (**5 Punkte**) Es seien $(V, ||.||_V), (W, ||.||_W)$ zwei Banachräume über $\mathbb{C}$ und

$$L(V, W) := \{A : V \longrightarrow W \mid A \text{ ist stetig und } \mathbb{C} - \text{linear } \}.$$

Zeigen oder widerlegen Sie:
Durch

$$||A|| := \sup\{||Ax|| \mid x \in V; ||x||_V \leq 1\}$$

wird eine Norm auf $L(V, W)$ definiert, so dass $(L(V, W), ||.||)$ ein Banachraum ist.

Aufgabe 4 (**5 Punkte**) Sei n ungerade. Sei $A \in O(n)$ mit $\det(A) = 1$, zeigen Sie, dass $\lambda = 1$ ein Eigenwert von A ist. Zeigen Sie weiterhin, dass $\lambda = -1$ ein Eigenwert ist, falls $A \in O(n)$ mit $\det(A) = -1$.