Prof. Dr. P. Littelmann
Dr. G. Fourier

Blatt 6
Abgabe: 16.06. in den Übungen

Übungen zur Mathematik für Physiker 2

Aufgabe 1 (**5 Punkte**) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (**5 Punkte**) Bestimmen Sie ein Lösungsfundamentalsystem $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ der folgenden Differentialgleichungen (wenn möglich reell)

1. $$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} x \ , \ \lambda \in \mathbb{C}$$

   mit den Anfangsbedingungen $\alpha_i(0) = e_i$, $i = 1, 2, 3$ wobei e_1, e_2, e_3 die kanonische Basis des $\mathbb{C}^3$ sei.

2. $$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x$$

3. $$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

Aufgabe 3 (**5 Punkte**)

1. Sei $h : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ eine stetige Funktion ($b = \infty$ zugelassen) mit divergierendem uneigentlichem Integral

   $$\int_a^b \frac{1}{h(x)} dx.$$

   Zeigen Sie: Dann gibt es für jedes $x_0 \in [a, b)$ eine streng monoton wachsende Lösung $\alpha : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $\dot{x} = h(x)$ mit $\alpha(0) = x_0$, und es gilt $\lim_{t \to \infty} \alpha(t) = b$.

2. Die Differentialgleichung $\dot{x} = g - \rho \dot{x}^\beta$ (g = Erdbeschleunigung, β, ρ positive Konstanten) beschreibt einen durch Reibung gebremsten Fall eines Körpers im Schwerefeld der Erde.
   Zeigen Sie: Es gibt auf $\mathbb{R}_0^+$ eine Lösung α mit $\alpha(0) = 0$, $\dot{\alpha}(0) = 0$ und $\ddot{\alpha} \geq 0$. Diese hat die "Endgeschwindigkeit" $v_\infty := \lim_{t\to\infty} \dot{\alpha}(t) = (g/\rho)^{1/\beta}$. Berechnen Sie die Lösung explizit für $\beta = 1$ und $\beta = 2$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

1. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $a, b \in C^0(I)$. Sei $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung
   $$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0,$$
   mit $\alpha(t) \neq 0$ auf einem Teilintervall $J \subset I$. Zeigen Sie, dass man auf J eine zweite von α linear unabhängige Lösung $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}$ findet in der Form $\beta(t) = \alpha(t)u(t)$, wobei u eine nichtkonstante Lösung der Differentialgleichung
   $$\ddot{u} + \left(2\frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha t} + \alpha t\right)\dot{u} = 0$$
   ist.

2. Finden Sie eine Lösung α der Gleichung
   $$\ddot{x} - \frac{1}{2t}\dot{x} + \frac{1}{2t^2}x = 0$$
   auf $I = \mathbb{R}^+$ durch einen linearen Ansatz $\alpha(t) = mt + c$. Verwenden Sie (a), um eine von α linear unabhängige Lösung zu finden.