Prof. Dr. P. Littelmann
Dr. G. Fourier

Blatt 9
Abgabe: 30.06. in den Übungen

Übungen zur Mathematik für Physiker 2

Aufgabe 1 (5 Punkte) Die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ seien wie folgt definiert:

$$f(x, y, z) = x^2 + xy - y - z$$

$$g(x, y, z) = 2x^2 + 3xy - 2y - 3z.$$

Zeigen Sie, dass

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0\}$$

eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist und dass $t \mapsto (t, t^2, t^3)$ eine globale Karte von C ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ Konstanten. Ein System aus zwei Massepunkten im festen Abstand a kann sich im $\mathbb{R}^2$ so bewegen, dass die Position $x = (x_1, x_2)$ des ersten Massepunktes immer $x_1^2 - x_2^2 = b$ erfüllt. Beschreiben Sie den Konfigurationsraum M des Systems als Teilmenge von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ und bestimmen Sie, für welche $b \in \mathbb{R}$ der Konfigurationsraum M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte) Seien $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_{-1} & -a_{-2} & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\chi_A(t) = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i$.

Aufgabe 4 (5 Punkte) Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen keine eindimensionalen Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^2$ sind:

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 = y^2\}$.