

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (124)(35)$

Behauptung Jedes Zykel ist ein Produkt von Transpositionen.

Denn: $(i_1, i_2, \dots, i_r) = (i_1, i_2)(i_2, i_3) \dots (i_{r-1}, i_r)$.

Behauptung Jede Permutation ist ein Produkt von Transpos.

Bemerkung: Diese Darstellung ist nicht eindeutig

Z.B. $e = (12)(12) = (13)(13)$.

(vi) Viele Beispiele kommen aus der Geometrie und Physik.

Sei V ein K -VR, $\dim V = n$, sei $B: V \times V \rightarrow K$ bilinear

Ein Automorphism von B ist ein Isomorphismus $\alpha: V \rightarrow V$

mit $B(\alpha v, \alpha w) = B(v, w)$. Die Automorphismen von B

bilden eine Gruppe $\text{Aut}(B)$. Ist $e_1, \dots, e_n$ eine Basis

von V , so bezeichnet $P = (B(e_i, e_j))_{i,j=1,\dots,n}$ die Matrix

von B . $\text{Aut}(B)$ ist dann identifiziert zu einer Matrizen-

-Gruppe: $\text{Aut}(B) \cong \{A \in M_{n \times n}(K) : {}^T A \cdot P \cdot A = P\}$

Ist B ein Skalarprodukt, so können wir $P = E_n$ nehmen

und $\text{Aut}(B) \cong O_n(K)$

Ist $K = \mathbb{C}$, B ein Hermitesches Skalarprod. so ist

$\text{Aut}(B) \cong \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{C}) : {}^T \bar{A} \cdot A = E_n\} = U_n$

Ist $V = \mathbb{R}^4$, $B(x, y) = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$

so ist $\text{Aut}(B) = O(3, 1)$ die Lorentz-Gruppe.

(vii) Sind $G_1, \dots, G_m$ Gruppen, so auch deren direktes Produkt, $G = G_1 \times \dots \times G_m$ mit der Verknüpfung

$(x_1, \dots, x_m)(y_1, \dots, y_m) = (x_1 y_1, \dots, x_m y_m)$.

Neutrales Elem $(e, \dots, e)$, Inverses zu $(x_1, \dots, x_m)$: $(x_1^{-1}, \dots, x_m^{-1})$.

(6)

1.1.6 Def. Sei G eine Gruppe. $H \subset G$ heißt Untergruppe (Schreibweise $H < G$): $\Leftrightarrow$ (i) $e \in H$ (ii) $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$
(iii) $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$

Bem. (1) Sei $H \subset G, H \neq \emptyset$. Dann gilt: $H < G \Leftrightarrow \forall a, b \in H: ab^{-1} \in H$.

$$(2) H_1, H_2 < G \Rightarrow H_1 \cap H_2 < G$$

1.1.7 Beispiele (i) $\{e\}, G < G$

$$(ii) (\mathbb{Z}, +) < (\mathbb{Q}, +) < (\mathbb{R}, +) < (\mathbb{C}, +)$$

$$(iii) H < (\mathbb{Z}, +) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0. H = n\mathbb{Z} := \{nq : q \in \mathbb{Z}\}$$

Beweis: $H = \{0\}$, so $H = 0\mathbb{Z}$; $H \neq \{0\} \Rightarrow \exists x \in H, x \neq 0$

$$\Rightarrow \{x, -x\} \subset H \Rightarrow H \cap \mathbb{N} \neq \emptyset \text{ Sei } n = \min. H \cap \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow n\mathbb{Z} \subset H. \text{ Sei nun } x \in H. \text{ Satz über Teilen mit}$$

$$\text{Rest } \leadsto x = nq + r, 0 \leq r < n \Rightarrow r = x - nq \in H$$

$$\text{und } 0 \leq r < n \Rightarrow r = 0 \text{ also } x = nq \in n\mathbb{Z}.$$

(iv) Sei $X \subset G$ eine Teilmenge. Die Untergruppe $\langle X \rangle := \bigcap \{H : X \subset H < G\}$ heißt die von X erzeugte Untergruppe. Ist $X = \emptyset$, so $\langle X \rangle = \{e\}$.

$$\text{Für } X \neq \emptyset \text{ gilt } \langle X \rangle = \{x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} : n \geq 0, \varepsilon_i = \pm 1, x_i \in X, 1 \leq i \leq n\}$$

$$\text{Ist } X = \{a\} \text{ so gilt } \langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\} \text{ wobei}$$

$$a^n = (a^{-1})^{|n|} \text{ für } n \leq 0$$

Eine Gruppe heißt zyklisch, wenn sie von einem Elem erzeugt wird, d.h. $\exists a \in G$ mit $G = \langle a \rangle$.

(v) Seien $r, s \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ (= Isometrien von $\mathbb{R}^2$)

die Spiegelungen an der Achsen Ox, Oy

Dann gilt $r^2 = \text{Id} = s^2, sr = rs = \text{Drehung um } O$ mit Drehwinkel π . Es folgt, dass $\{\text{Id}, r, s, rs\}$ eine Untergruppe ist.

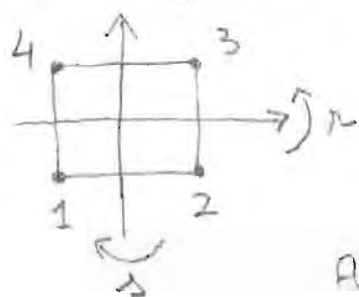
(7)

Sie heißt die Dieder-Gruppe D_2 . Multiplikationstabelle:

	Id	r	s	rs
Id	Id	r	s	rs
r	r	Id	rs	s
s	s	rs	Id	r
rs	rs	s	r	Id

Da $|D_2| = 4$, heißt diese Gruppe auch Klein'sche Viergruppe.

Diese Gruppe wirkt durch Permutationen auf die Ecken eines Quadrats:



$$r \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (14)(23)$$

$$s \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (12)(34)$$

$$rs \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (13)(24)$$

$$\text{Also } D_2 \cong V_4 := \{ e, (12)(34), (13)(24), (14)(23) \} < S_4.$$

(vi) Sei $n \geq 3$. Die Dieder-Gruppe D_n ist die Symmetriegruppe eines regelmäßigen n -Ecks d.h. die Menge derjenigen Isometrien der Ebene, die die Menge der n Eckpunkte auf sich abbildet.

Jedes Elem der Dieder-Gruppe bildet den Schwerpkt G des n -Ecks auf sich ab.

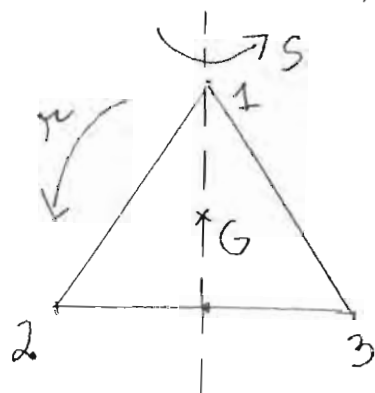
Satz Isometrien der Ebene die einen Pkt G festhalten sind:

- (1) Drehungen um den Pkt G
- (2) Spiegelungen an einer Achse durch G

Also kommen nur Drehungen und Spiegelungen als Elem von D_n in Frage.

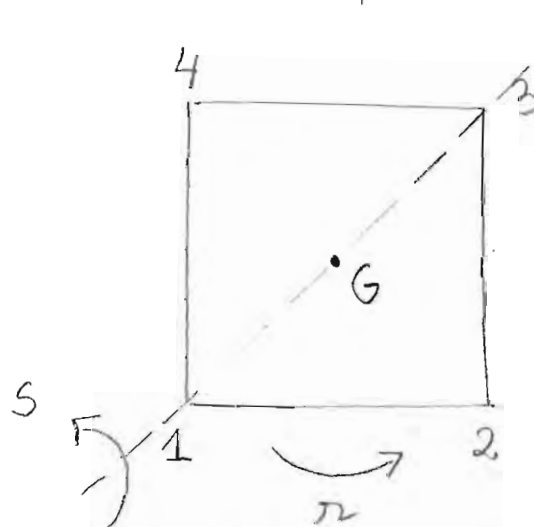
(8)

Behauptung Sei r die Drehung um $\frac{2\pi}{n}$ um G und s die Spiegelung an einer festen Symmetrie-Achse des n -Ecks. Dann ist die Dieder-Gruppe durch r und s erzeugt, die die Relationen $r^n = e$, $s^2 = e$ und $sr = r^{-1}s$ erfüllen. Es gilt $|D_n| = 2n$ und $D_n = \{e, r, \dots, r^{n-1}, s, rs, \dots, r^{n-1}s\}$



$$s \leadsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (23)$$

$$r \leadsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123)$$



$$r \leadsto (1\ 2\ 3\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s \leadsto (2\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

D_n kann auch als die Untergruppe von S_n definiert werden, welche von $r = (1\ 2\ \dots\ n)$ (d.h. $r: i \mapsto i+1 \pmod{n}$) und $s: i \mapsto n+2-i \pmod{n}$ erzeugt wird.