

Die kanonische Projektion $\pi: G \rightarrow G/N$, $\pi(a) = aN$ ist ein surjektiver Homom. mit $\text{Ker } \pi = N$.

Beweis z.z. $n_1, n_2 \in N \Rightarrow an_1 \cdot bn_2 \in abN$.

Aber $n_1 b \in Nb = bN$ also $\exists n_3 \in N$ mit $n_1 b = n_3 b$
 $\Rightarrow an_1 bn_2 = abn_3 n_2 \in abN$.

$N = eN \in G/N$ ist das neutrale Elem., $a^{-1}N$ invers zu aN .

Wegen $aN \cdot bN = abN$ gilt $\pi(a)\pi(b) = \pi(ab)$. $\square$

1.2.7 Bsp. Sei $n \in \mathbb{Z}$, dann ist $n\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$ ($(\mathbb{Z}, +)$ abelsch).

Die Nebenklassen von $n\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ sind $a + n\mathbb{Z}$. Die zugehörige Äquivalenz ist $a \equiv b \pmod{n} : \Leftrightarrow a - b \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow n \mid a - b$.

Wir sagen, a ist kongruent mit b modulo n .

Ist $n > 0$ so ist $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow a, b$ haben denselben Rest bei der Division durch n .

Die Nebenklassen $\hat{a} = a + n\mathbb{Z} = \{b; a \equiv b \pmod{n}\}$ heißen auch Kongruenz- oder Restklassen.

Bei der Uhrzeit rechnen wir modulo 12: 17 Uhr $\equiv$ 5 Uhr

Bei der Winkelmessung rechnen wir modulo 360.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gibt genau n Resten bei der Division durch n , also $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\hat{0}, \hat{1}, \dots, \hat{n-1}\}$. Die Verknüpfung ist $\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a+b}$. Es folgt, dass $\hat{1}$ erzeugt $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ heißt zyklische Gruppe der Ordnung n .

Die Regel $\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a+b}$ bedeutet:

$$a \equiv a' \pmod{n}, b \equiv b' \pmod{n} \Rightarrow a+b \equiv a'+b' \pmod{n}$$

d.h. Kongruenzen können addiert werden.

Es gilt aber auch $a \equiv a' \pmod{n}, b \equiv b' \pmod{n} \Rightarrow aa' \equiv bb' \pmod{n}$

d.h. man kann definieren $\hat{a} \cdot \hat{b} := \widehat{ab}$.

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \cdot)$ ist dann ein Monoid, $\hat{1}$ ist Einselem.

1.2.8 Satz (Homomorphiesatz)

Sei $N \triangleleft G$, $\varphi \in \text{Hom}(G, G')$ mit $N \subset \text{Ker } \varphi$.

Dann $\exists!$ $\bar{\varphi} \in \text{Hom}(G/N, G')$ mit $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi_N$ d.h.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & G' \\ \pi_N \downarrow & \nearrow \bar{\varphi} & \\ & G/N & \end{array}$$

Es gilt $\text{Im } \bar{\varphi} = \text{Im } \varphi$, $\text{Ker } \bar{\varphi} = \pi_N(\text{Ker } \varphi)$, $\text{Ker } \varphi = \pi_N^{-1}(\text{Ker } \bar{\varphi})$

Insb. $\bar{\varphi}$ injektiv $\Leftrightarrow N = \text{Ker } \varphi$.

Beweis Eindeutigkeit: ist $\varphi' \in \text{Hom}(G/N, G')$ mit

$$\varphi = \varphi' \circ \pi_N, \text{ so } \bar{\varphi}(\hat{a}) = \bar{\varphi}(\pi_N(a)) = (\varphi' \circ \pi_N)(a) = \varphi(a)$$

und genauso $\varphi'(\hat{a}) = \varphi(a)$ für alle $\hat{a} \in G/N \Rightarrow \bar{\varphi} = \varphi'$.

Existenz: Setze $\bar{\varphi}(\hat{a}) := \varphi(a)$; $\bar{\varphi}$ wohldefiniert:

$$\hat{a} = \hat{b} \Rightarrow a^{-1}b \in N \subset \text{Ker } \varphi \Rightarrow \varphi(a^{-1}b) = e' \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$$

$$\text{also } \bar{\varphi}(\hat{a}) = \bar{\varphi}(\hat{b}).$$

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} \text{ Homom: } \bar{\varphi}(\hat{a}\hat{b}) &= \bar{\varphi}(\widehat{ab}) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \\ &= \bar{\varphi}(\hat{a})\bar{\varphi}(\hat{b}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Im } \bar{\varphi} &= \text{Im } \varphi \text{ klar; } \hat{a} \in \text{Ker } \bar{\varphi} \Leftrightarrow \varphi(a) = \bar{\varphi}(\hat{a}) = e' \\ &\Leftrightarrow a \in \text{Ker } \varphi. \quad \square \end{aligned}$$

1.2.9 Folgerung Ist $\varphi: G \rightarrow G'$ ein surjektiver Homom.,
so G' kanonisch isomorph zu $G/\text{Ker } \varphi$.

$$\begin{aligned} \text{Bsp. } \text{GL}_n(K)/\text{SL}_n(K) &\cong K^*, \quad \text{O}(n)/\text{SO}(n) \cong \{\pm 1\}, \\ S_n/A_n &\cong \{\pm 1\} \end{aligned}$$

1.2.10 Satz (1. Isomorphiesatz)

Seien $H < G$, $N \triangleleft G$. Dann gilt:

(i) $HN := \{hx : h \in H, x \in N\} < G$,

(ii) $N \triangleleft HN$, $H \cap N \triangleleft H$,

(iii) $HN/H \cong H/H \cap N$.

Beweis (i) $x, x_1 \in N, h, h_1 \in H \Rightarrow hx(h_1 x_1)^{-1} = hx x_1^{-1} h_1^{-1}$
 $= \underbrace{h h_1^{-1}}_{\in H} \underbrace{h_1 x x_1^{-1} h_1^{-1}}_{\in N} \in HN$.

(ii) klar

(iii) Sei $\varphi: H \hookrightarrow HN \rightarrow HN/N \in \text{Hom}(H, HN/N)$ surjektiv
 Inkl.

(Ein Elem in HN/N ist der Form hxN mit $h \in H, x \in N \rightsquigarrow hxN = hN$)

$\text{Ker } \varphi = \{h \in H : hN = N\} = H \cap N$. Satz 1.2.9 $\rightsquigarrow$ (iii) $\square$

1.2.11 Satz (2. Isomorphiesatz)

Seien $N \triangleleft G$, $H \triangleleft G$ mit $N < H$. Dann ist $N \triangleleft H$ und man kann H/N als UG von G/N auffassen. Es ist $H/N \triangleleft G/N$ und $(G/N)/(H/N) \cong G/H$.

Beweis Sei $\varphi: H \hookrightarrow G \rightarrow G/N \in \text{Hom}(H, G/N)$. Da $\text{Ker } \varphi = N$ ist $\bar{\varphi}: H/N \rightarrow G/N$ injektiv (Satz 1.2.8). Identifiziere $\text{Im}(\bar{\varphi}) \cong H/N$ mit H/N . Es ist $H/N \triangleleft G/N$: $h \in H, a \in G \rightsquigarrow aN \cdot hN \cdot (aN)^{-1} = aN \cdot hN \cdot a^{-1}N = \underbrace{(ah a^{-1})}_{\in H} N \in H/N$.

Sei $\pi_H: G \rightarrow G/H$. Wegen $N < H = \text{Ker } \pi_H$, gibt es nach

Satz 1.2.8 $\bar{\pi}_H: G/N \rightarrow G/H$, $aN \mapsto aH$

$\text{Im } \bar{\pi}_H = \text{Im } \pi_H = G/H$ und $\text{Ker } \bar{\pi}_H = \pi_N(\text{Ker } \pi_H) = \pi_N(H) = H/N$

Daher $(G/N)/(H/N) \cong G/H$ nach 1.2.9. $\square$