7. Vorlesung, 3.11.2010

Wiederholung: Bahngleichung

G operiere auf einer endlichen Menge X. Sei R ein Vertretersystem der Bohnen (d.h. R enthält aus jede Bahn genau ein Element). Dann gilt

$$|X| = \sum_{r\in R} |Gr| = \sum_{r\in R} (G : G_r)$$

wobei $G_r := \{g \in G : gr = r\}$

Eine wichtige Operation ist die Op. von G auf G durch Konjugation: $G \to \mathrm{Aut}(G)$, $g \mapsto \mathrm{int}_g =: \mathrm{ad}(g)$ wobei $\mathrm{int}_g(h) = ghg^{-1}$. Die Bohnen dieser Op. heißen Konjugationklassen. Sie haben die Form $\{ghg^{-1} : g \in G\}$

Sei $Z(G) = \{x \in G : gxg^{-1} = x \ \forall g \in G\}$ (Zentrum von G)

Es gilt $\{ghg^{-1} : g \in G\} = \{h\} \Leftrightarrow h \in Z(G)$

Die Isotropiegruppe: $G_r = \{g \in G : grg^{-1} = r\} = Z_r$ (Zentralisator von r)

Die Bahngleichung ergibt:

<u>1.4.7 Klassengleichung</u> Sei G eine endliche Gruppe.

Dann gilt $\mathrm{ord}\, G = \mathrm{ord}\, Z(G) + \sum_{r\in R\setminus Z(G)} |G : Z_r|$

wobei R ein Vertretersystem für die Konjugationsklassen ist.

<u>Beweis</u> $\mathrm{ord}\, G = \sum_{r\in R} (G : Z_r) = \sum_{r\in R\cap Z(G)} \dots + \sum_{r\in R\setminus Z(G)} \dots$ ∎

§1.5. Sylow-Gruppen

1.5.1 Def Sei p eine Primzahl. Eine Gruppe G heißt p-Gruppe, wenn $\mathrm{ord}\, G = p^k$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Sei $\mathrm{ord}(G) = p^k m$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $\mathrm{ggT}(m, p) = 1$.

Eine UG $H < G$ heißt p-Sylow-Gruppe falls $\operatorname{ord} H = p^k$.

Bem. Jede p-Sylow-Gruppe in einer endl. Gruppe G ist maximale p-Gruppe

1.5.2 Def Der Exponent einer endl. Gruppe G ist die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n = e$ für alle $a \in G$.

1.5.3 Lemma Sei G endlich.

(i) Der Exp. von G ist das kgV aller $\operatorname{ord}(a)$ mit $a \in G$

(ii) — " — teilt $\operatorname{ord}(G)$

Beweis (i) Es gilt $a^n = e \Leftrightarrow \operatorname{ord}(a) | n$.

(ii) $\operatorname{ord}(a) | \operatorname{ord} G \ \forall a \in G \Rightarrow \operatorname{ord} G$ gV von $\{\operatorname{ord}(a), a \in G\}$ ▨

1.5.4 Lemma Sei G endlich und abelsch, $n =$ Exp von G

Dann $\exists m \in \mathbb{N} : \operatorname{ord} G \mid n^m$.

Beweis Induktion nach $\operatorname{ord} G$. Ist $\operatorname{ord} G = 1 \rightsquigarrow$ Beh. klar

Nehmen wir an die Aussage ist wahr für alle Gruppen G' mit $\operatorname{ord} G' < \operatorname{ord} G$, wobei $\operatorname{ord} G > 1$. Sei $a \in G \setminus \{e\}$,

$H = \langle a \rangle \rightsquigarrow \operatorname{ord}(H) = \operatorname{ord}(a) \mid n$. Da G abelsch ist, $H \trianglelefteq G$ und betrachte G/H : (i) $\operatorname{ord}(G/H) < \operatorname{ord} G$ (da $a \neq e$)

(ii) Der Exp. von G/H teilt n $\left(\hat{x}^n = \widehat{x^n} = \hat{e} \ \forall x \in G \right)$

Induktionsannahme $\rightsquigarrow \exists l \in \mathbb{N} : (G:H) \mid n^l \rightsquigarrow$

$\operatorname{ord} G = \operatorname{ord} H \cdot (G:H) \mid n \cdot n^l = n^{l+1}$ ▨

<u>1.5.5 Satz (Cauchy)</u> Sei G endlich & abelsch, p prim, $p \mid \operatorname{ord} G$. Dann existiert $H < G$, $\operatorname{ord} H = p$.

<u>Beweis</u> Sei n der Exp. von G. 1.5.4 $\rightsquigarrow \exists m \ p \mid \operatorname{ord} G \mid n^m$

$\rightsquigarrow p \mid n = \operatorname{kgV} \{\operatorname{ord}(a) : a \in G\} \rightsquigarrow \exists a \in G \ p \mid \operatorname{ord}(a)$

Sei $\operatorname{ord}(a) = p \cdot k$. Dann ist $\operatorname{ord}(a^k) = p$.

1.5.6 Satz (Sylow) Sei $\operatorname{ord} G = p^k m$, p prim, $k \in \mathbb{N}_0$, $\operatorname{ggT}(p,m)=1$. Dann besitzt G eine UG der Ordnung p^k, insbesondere hat G eine p-Sylow-Untergruppe.

Beweis Induktion nach $\operatorname{ord} G$. Ist $\operatorname{ord} G = 1 \rightsquigarrow$ Beh. klar. Sei $\operatorname{ord} G > 1$. OBdA $k > 0$. Wir nehmen an, dass die Beh. für alle Gr. G' mit $\operatorname{ord} G' < \operatorname{ord} G$ wahr ist.

1. Fall. $p \mid \operatorname{ord} Z(G) \underset{1.5.5}{\rightsquigarrow} \exists H < Z(G)$, $\operatorname{ord} H = p$

$H < Z(G) \rightsquigarrow H \trianglelefteq G$ und $\operatorname{ord} G = \operatorname{ord} H \cdot (G:H)$, also $(G:H) = p^{k-1} m$

Indvor. für $G/H \rightsquigarrow \exists G' < G/H$ mit $\operatorname{ord} G' = p^{k-1}$

Sei $H' = \pi_H^{-1}(G')$, wobei $\pi_H : G \to G/H$. Dann gilt $\operatorname{ord} H' = p^k$.

2. Fall $\operatorname{ggT}(p, \operatorname{ord} Z(G)) = 1$. Klassengleichung:

$$\operatorname{ord} G = \operatorname{ord} Z(G) + \sum_{g \in R \setminus Z(G)} (G : Z_g)$$

Da $p \mid \operatorname{ord} G \rightsquigarrow \exists g \in R \setminus Z(G)$ mit $\operatorname{ggT}(p, (G:Z_g)) = 1$

$g \notin Z(G) \rightsquigarrow Z_g \neq G$ also $\operatorname{ord} Z_g < \operatorname{ord} G$.

$\operatorname{ord} G = \operatorname{ord} Z_g \cdot (G : Z_g) \rightsquigarrow p^k \mid \operatorname{ord} Z_g$.

Induktionsvor. $\rightsquigarrow \exists H < Z_g < G$ mit $\operatorname{ord} H = p^k$. ∎

1.5.7 Def Zwei UG $H, H' < G$ heißen konjugiert wenn es $g \in G$ gibt mit $\operatorname{ad}(g)H := gHg^{-1} = H'$

Die Gruppe G operiert durch Konjugation auf die Menge der Untergruppen: mit einer UG $H < G$ ist auch $\operatorname{ad}(g)H = gHg^{-1} < G$.