8. Vorlesung, 8.11.2010

<u>1.5.8 Satz (Sylow)</u> Sei p prim, G endlich.

(i) Jede p-UG von G ist in eine p-Sylow-UG enthalten

(ii) Je zwei p-Sylow-UG sind zueinander konjugiert.

(iii) Sei $s_p =$ Anzahl der p-Sylow-UG. Dann gilt

$$s_p \mid \operatorname{ord} G \quad , \quad s_p \equiv 1 \pmod p .$$

<u>Beweis</u> Sei $\mathfrak{S}_p$ die Menge der p-Sylow-Gruppen. (nicht leer nach Satz 1.5.7). G operiert auf $\mathfrak{S}_p$ durch Konjugation, denn mit H ist auch gHg^{-1} eine p-Sylow-UG. Sei $\mathfrak{S}_p(H) = \{gHg^{-1} : g \in G\}$ die Konjugationsklasse von $H \in \mathfrak{S}_p$. Sei $N_G(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$ der Stabilisator.

Es gilt $(G : N_G(H)) = |\mathfrak{S}_p(H)|$. Außerdem $\operatorname{ord} G = \operatorname{ord} N_G(H) \cdot (G : N_G(H))$ und die Ordnung von $H \subset N_G(H)$ bereits die maximale Potenz von p in $\operatorname{ord} G$ ist, folgt dass p und $(G : N_G(H)) = |\mathfrak{S}_p(H)|$ teilerfremd sind.

Sei nun $H' < G$ eine p-UG. Sie operiert auf $\mathfrak{S}_p(H)$ durch Konjugation. Es gibt dann ein Vertretersystem $R \subset \mathfrak{S}_p(H)$ mit $\mathfrak{S}_p(H) = \bigcup_{K \in R} \operatorname{ad}(H')(K) = \bigcup_{K \in R} \{h'Kh'^{-1} : h' \in H'\}$

$$\rightsquigarrow |\mathfrak{S}_p(H)| = \sum_{K \in R} |\operatorname{ad}(H') \cdot K| .$$

Aber $|\operatorname{ad}(H')K| = (H' : \operatorname{Stab}(H')) \mid \operatorname{ord} H'$ also $|\operatorname{ad}(H')K| = p^\ell$. Da $\operatorname{ggT}(|\mathfrak{S}_p(H)|, p) = 1 \rightsquigarrow \exists K$ mit $\operatorname{ad}(H') \cdot K = K \rightsquigarrow H' \subset N_G(K)$

1. Isomorphiesatz für $K \lhd N_G(K)$, $H' < N_G(K)$ liefert:

$$KH'/K \cong H'/(H' \cap K)$$

H', K p-Gruppen $\rightsquigarrow$ KH' p-Gruppe, $K \subset KH' \rightsquigarrow K = KH'$
$\rightarrow H' \subset K$ Daher ist jede p-Gruppe in einer Konjugierten von H enthalten. Dies gilt insb. für p-Sylow-UG
$\rightarrow \mathcal{S}_p(H) = \mathcal{S}_p$ Die Aussagen (i) & (ii) ergeben sich.

Die Gruppe H operiere nun selbst auf $\mathcal{S}_p(H)$, also wiederum $|\mathcal{S}_p(H)| = \sum_{K \in R} |ad(H)K|$ mit $|ad(H)K| = p^l$
und $l = 0 \Leftrightarrow ad(H)K = \{K\} \Leftrightarrow K = H$
Also $|\mathcal{S}_p| = |\mathcal{S}_p(H)| = 1 + \sum_{l>0} p^l \equiv 1 \pmod p$. ▨

<u>1.5.9 Korollar</u> Sei G endlich, p prim. Dann gilt:
(i) G p-Gruppe $\Leftrightarrow$ $\forall a \in G$: ord(a) ist eine p-Potenz
(ii) Jede maximale pUG von G ist p-Sylow-UG.

<u>1.5.10 Korollar</u> Sei G endlich & abelsch, p prim. Dann ist $S := \{a \in G;\ \text{ord}(a) \text{ ist eine p-Potenz}\}$ eine p-Sylow-UG, und zwar die einzige.

<u>1.5.11 Beispiele</u> (i) $G = S_3$, ord $G = 6 = 2 \cdot 3$.
G hat die 2-Sylow-UG: $\langle (12) \rangle, \langle (13) \rangle, \langle (23) \rangle$
G hat eine 3-Sylow-UG: $\langle (123) \rangle = A_3 \lhd S_3$
Sie ist die einzige: $s_3 \mid 6$, $s_3 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow s_3 = 1$.

(ii) $G = S_4$, $\operatorname{ord} G = 24 = 2^3 \cdot 3$. Wir finden leicht eine 2-Sylow-UG: sei D_4 die Dieder-Gruppe (Symmetriegruppe eines Quadrates), $\operatorname{ord} D_4 = 2\cdot 4 = 8$ und $D_4 < S_4$.

Es gilt $s_2 \mid 24$, $s_2 \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow s_2 \in \{1,3\}$

Wäre $s_2 = 1$, so wäre $D_4 \triangleleft S_4$, Widerspruch, da $(12)(1234)(12) = (1342) \notin D_4$. Es bleibt $s_2 = 3$.

Anzahl der 3-Sylow-UG: $s_3 \mid 24$, $s_3 \equiv 1 \pmod 3$ also $s_3 \in \{1,4\}$. Richtig is $s_3 = 4$: $\langle(123)\rangle, \langle(134)\rangle, \langle(124)\rangle, \langle(234)\rangle$

(iii) Sei $\operatorname{ord} G = 15 = 3\cdot 5$; $s_3 \mid 15$, $s_3 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow s_3 = 1$

$s_5 \mid 15$, $s_5 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow s_5 = 1$. Seien $U_3 < G$, $U_5 < 5$ mit $\operatorname{ord} U_3 = 3$, $\operatorname{ord} U_5 = 5$. Da $s_3 = s_5 = 1$ folgt $U_3 \triangleleft G$, $U_5 \triangleleft G$. Es gilt $U_3 \cap U_5 = \{e\}$, da Elem. aus $U_3 \cap U_5 \setminus \{e\}$ Ordnung 3 und 5 hätten $\lightning$. Es folgt, dass U_3, U_5 kommutieren ($a \in U_3$, $b \in U_5 \Rightarrow aba^{-1}b^{-1} \in U_3 \cap U_5 = \{e\}$)

$\rightsquigarrow$ G ist das innere direkte Produkt von U_3 und U_5 (siehe Aufg 1, Blatt 3) d.h. $\varphi: U_3 \times U_5 \to G$, $\varphi(a,b) = ab$ ist Isomorphismus.

$\rightsquigarrow$ $G \cong U_3 \times U_5 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$

(siehe Aufgabe 2(ii), Blatt 2)

(iv) $G = A_4$; $\operatorname{ord} G = 12 = 2^2 \cdot 3$; $s_2 \mid 12$, $s_2 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow s_2 \in \{1,3\}$

Eine 2-Sylow-UG ist die Kleinsche Vierergruppe $V_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Wegen Aufgabe 2(iii), Blatt 3 gilt $V_4 \triangleleft A_4$, also $s_2 = 1$.

$s_3 \mid 12$, $s_3 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow s_3 \in \{1,4\}$. Richtig ist $s_3 = 4$: $\langle(123)\rangle, \langle(134)\rangle, \langle(124)\rangle, \langle(234)\rangle$.