

## § 1.7. Auflösbare Gruppen

1.7.1. Def. Sei  $G$  eine Gruppe.

(i) Für  $a, b \in G$  definiere der Kommutator von  $a, b$  durch

$$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$$

(ii)  $[G, G] := \langle \{ [a, b] : a, b \in G \} \rangle$  heißt Kommutatorgruppe von  $G$ .

Bem. (i)  $ab = ba \Leftrightarrow [a, b] = e$ ;  $G$  abelsch  $\Leftrightarrow [G, G] = \{e\}$ .

(ii)  $[a, b]^{-1} = [b, a]$  also  $[G, G] = \{ \text{endliche Prod. von Kommutatoren in } G \}$

1.7.2 Lemma  $[G, G] \triangleleft G$  und  $[G, G]$  ist der kleinste NT  $N \triangleleft G$ , so dass  $G/N$  abelsch.

Bew. Sei  $g \in G$ . Dann für alle  $a, b \in G$  gilt  $g[a, b]g^{-1} = [ga g^{-1}, gb g^{-1}]$  also  $\text{int}_g([a_1, b_1] \dots [a_k, b_k]) = \text{int}_g[a_1, b_1] \dots \text{int}_g[a_k, b_k] \in [G, G]$   
 $\leadsto \text{int}_g[G, G] \subset [G, G] \leadsto [G, G] \triangleleft G$ .

$G/[G, G]$  abelsch: zu  $a \in G$  sei  $\hat{a} = a[G, G] \in G/[G, G]$ .

Dann  $[\hat{a}, \hat{b}] = \hat{a}\hat{b}\hat{a}^{-1}\hat{b}^{-1} = \widehat{aba^{-1}b^{-1}} = \hat{e}$

Sei  $N \triangleleft G$  mit  $G/N$  abelsch. z.z.  $[G, G] \subset N$ . Seien  $a, b \in G$

Für  $\hat{a} = aN, \hat{b} = bN \leadsto \hat{e} = [\hat{a}, \hat{b}] = \widehat{[a, b]} \leadsto [a, b] \in N$ .

1.7.3. Def. Setze  $D^0 G = G$ ,  $D^1 G = [G, G]$ , ...,  $D^{i+1} G = [D^i G, D^i G]$  für  $i \in \mathbb{N}$ .  $D^i G$  heißt die  $i$ -te iterierte Kommutatorgruppe von  $G$ .

1.7.4. Bem.  $D^{i+1} G \triangleleft D^i G$  und  $D^i G / D^{i+1} G$  ist abelsch.

$G = D^0 G \triangleright D^1 G \triangleright D^2 G \triangleright \dots$  heißt Kommutatorreihe von  $G$ .

i. A. gibt es kein  $i$  mit  $D^i G = \{e\}$ .

1.7.5 Def (i) Eine Kette von UGen  $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \dots \triangleright G_n = \{e\}$  heißt Normalreihe falls  $G_{i+1} \triangleleft G_i$  für alle  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ .

Die Gruppen  $G_i / G_{i+1}$  heißen Faktoren der Normalreihe.

(ii) Eine Gruppe  $G$  heißt auflösbar, falls sie eine Normalreihe mit abelschen Faktoren besitzt.

(iii)  $G$  heißt einfach falls  $\{e\}, G$  die einzigen NT von  $G$  sind.

1.7.6 Beispiele auflösbarer Gruppen:

(i) Abelsche Gruppen (ii) Endliche  $p$ -Gruppen

(iii) UGen auflösbarer Gruppen (iv) Homomorphe Bilder aufl. Gr.

1.7.7 Satz  $G$  auflösbar  $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$  mit  $D^n G = \{e\}$

Beweis " $\Rightarrow$ " Sei  $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \dots \triangleright G_n = \{e\}$  eine Normalreihe mit  $G_i / G_{i+1}$  abelsch. Wir beweisen per Induktion, dass  $D^i G \subset G_i$ . Für  $i=0$ ,  $D^0 G = G = G_0$ . Sei  $i > 0$ .

Weil  $G_{i-1} / G_i$  abelsch, folgt  $[G_{i-1}, G_{i-1}] \subset G_i$  aber

$$D^i G = [D^{i-1} G, D^{i-1} G] \underset{\text{IV}}{\subset} [G_{i-1}, G_{i-1}] \subset G_i$$

Insbesondere  $D^n G \subset G^n = \{e\}$  aber  $D^n G = \{e\}$ .

" $\Leftarrow$ " klar nach 1.7.4.  $\square$

1.7.8 Lemma Sei  $N \triangleleft G$ ,  $M' \triangleleft G/N =: G'$ ,  $M := \pi^{-1}(M')$  wobei  $\pi: G \rightarrow G/N$ . Dann gilt

$$G \triangleright M \triangleright N, \quad G/M \cong G'/M', \quad M/N \cong M'$$

Beweis  $\text{Ker}(\pi|_M) = N$  aber  $M/N \cong \text{Im}(\pi|_M) = M'$

2. Isomorphiesatz  $\leadsto G'/M' = (G/N)/(M/N) \cong G/M. \quad \square$

1.7.9 Satz Sei  $G$  endlich und auflösbar. Dann lässt sich jede Normalreihe mit abelschen Faktoren verfeinern, zu einer Normalreihe mit zyklischen Faktoren, deren Ordnungen prim (oder 1) sind.

Beweis Sei  $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \dots \triangleright G_n = \{e\}$  mit abelschen Faktoren. Sei  $i$  fest. Wir wollen  $G_i \triangleright M_1 \triangleright \dots \triangleright M_k \triangleright G_{i+1}$  finden, mit  $M_j/M_{j+1}$  zyklisch, mit  $\text{ord}(M_j/M_{j+1})$  prim. Nun ist aber  $G_i/G_{i+1} \cong \prod_{j=1}^n \mathbb{Z}/p_j^{l_j} \mathbb{Z}$  da  $G_i/G_{i+1}$  abelsch

$$\text{Aber } \mathbb{Z}/p_j^{l_j} \mathbb{Z} \triangleright \mathbb{Z}/p_j^{l_j-1} \mathbb{Z} \triangleright \dots \triangleright \mathbb{Z}/p_j \mathbb{Z} \triangleright \{e\}$$

$$\leadsto \prod_{j=1}^n \mathbb{Z}/p_j^{l_j} \mathbb{Z} \triangleright \mathbb{Z}/p_1^{l_1-1} \mathbb{Z} \times \prod_{j=2}^n \mathbb{Z}/p_j^{l_j} \mathbb{Z} \triangleright \dots \triangleright \mathbb{Z}/p_j \mathbb{Z} \times \prod_{j=2}^n \mathbb{Z}/p_j^{l_j} \mathbb{Z}$$

$$\triangleright \prod_{j=2}^n \mathbb{Z}/p_j^{l_j} \mathbb{Z} \triangleright \mathbb{Z}/p_2^{l_2-1} \mathbb{Z} \times \prod_{j=3}^n \mathbb{Z}/p_j^{l_j} \mathbb{Z} \triangleright \dots \triangleright \{e\}$$

wobei die Faktoren  $\cong \mathbb{Z}/p \mathbb{Z}$  mit  $p$  prim.

Nimmt man nun die Urbilder dieser Kette durch  $\pi: G_i \rightarrow G_i/G_{i+1}$  und benutzt Lemma 1.7.8, so folgt die Behauptung.  $\blacksquare$

1.7.10 Bsp. Wir untersuchen, welche symmetrischen Gruppen auflösbar sind.

$$\begin{aligned} (i) \quad [S_n, S_n] &\subset A_n, \text{ da } \varepsilon([\sigma, \tau]) = \varepsilon(\sigma \tau \sigma^{-1} \tau^{-1}) \\ &= \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\tau) \varepsilon(\sigma^{-1}) \varepsilon(\tau^{-1}) = \varepsilon(\sigma \sigma^{-1}) \varepsilon(\tau \tau^{-1}) = 1. \end{aligned}$$