(ii) Ist $K \subset E \subset L$ Körpererweiterungen, so heißt E ein Zwischenkörper der Erweiterung $K \subset L$

(iii) Der Grad $[L:K]$ der Körpererw. $K \subset L$ ist $\dim_K L \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

(iv) Eine Körpererw. $K \subset L$ heißt (un)endlich, wenn ihr Grad es ist.

<u>3.2.3. Gradsatz</u> $K \subset L \subset M$ Körpererweiterungen $\rightsquigarrow$

$$[M:K] = [M:L] \cdot [L:K]$$

<u>Beweis</u> Seien $x_1, \dots, x_m \in L$ lin. unabhängig über K (d.h. in K-VR L)

$y_1, \dots, y_n \in M$ — " — — " — L

Wir zeigen, dass $\{x_i y_j : 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ lin. unabh. über K

Gilt $\sum c_{ij} x_i y_j = 0$ $(c_{ij} \in K)$ so $\sum_j \big(\underbrace{\sum_i c_{ij} x_i}_{\in L}\big) y_j = 0$

$\Rightarrow \sum_i c_{ij} x_i = 0 \Rightarrow c_{ij} = 0$

Daraus folgt schon die Beh. falls $[M:L]$ oder $[L:K]$ unendlich

Falls beide endlich: seien $x_1, \dots, x_m$ und $y_1, \dots, y_n$ jeweils Basen. Z.z. $\{x_i y_j : 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ Basis in M über K.

$z \in M \rightsquigarrow \exists d_j \in L: z = \sum d_j y_j \rightsquigarrow \exists c_{ij} \in K: d_j = \sum c_{ij} x_i$

$\rightsquigarrow z = \sum c_{ij} x_i y_j$ ∎

<u>3.2.4 Def</u> $R \subset R'$ Unterring (i) Sei $\alpha \in R'$. Die Abbildg $\varphi_\alpha : R[X] \to R'$, $\varphi_\alpha(\sum a_i X^i) = \underbrace{\sum a_i \alpha^i}_{=: f(\alpha)}$, heißt <u>Einsetzungshomom.</u>

(ii) $\alpha \in R'$ heißt Nullstelle von f, falls $f(\alpha) = 0$ (d.h. $\varphi_\alpha(f) = 0$).

(iii) $R[\alpha] := \operatorname{Im} \varphi_\alpha \subset R'$ (Unterring)

<u>Bem</u> $R[\alpha]$ ist der von R und α erzeugte Unterring von R', $R[\alpha] = \bigcap \{L : R \cup \{a\} \subset L \text{ Unterring}\}$. Ist $K \subset L$ Körpererw und $a \in L$ so $K(a) := \bigcap \{K' \text{ Körper}: K \cup \{a\} \subset K'\}$. Dann $K(a) = Q(K[a])$.

3.2.5 Def Sei $K \subset L$ Körpererweiterung; $\alpha \in L$ heißt algebraisch über K, falls $\operatorname{Ker}\varphi_\alpha \neq 0$ d.h. $\exists\, c_1, \dots, c_k \in K: \alpha^n + c_1\alpha^{n-1} + \dots + c_{n-1} = 0$

α heißt transzendent über K, falls nicht algebraisch.

L heißt algebraisch über K, falls alle $\alpha \in L$ alg. über K.

Bsp. $q \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \rightsquigarrow \alpha = \sqrt[n]{q} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ alg. über $\mathbb{Q}$, da $\alpha^n - q = 0$

$\alpha = e^{2\pi i/n} \in \mathbb{C}$ alg. über $\mathbb{Q}$, da $\alpha^n - 1 = 0$

π, e transzendent über $\mathbb{Q}$

3.2.6 Lemma $K \subset L$ Körpererw., $\alpha \in L$ algebraisch über K $\Rightarrow \exists!$ normiertes Polynom kleinsten Grades $f \in K[X]$ mit $f(\alpha) = 0$. Es gilt $\operatorname{Ker}\varphi_\alpha = (f)$ und f ist irred in $K[X]$.

Insb. ist $K[X]/(f) \cong \operatorname{Im}\varphi_\alpha = K[\alpha] \subset L$ ein Körper, $K[\alpha] = K(\alpha)$.

Beweis $K[X]$ Hauptidealring (Satz 2.4.7) $\rightsquigarrow \exists f \in K[X]$ mit $\operatorname{Ker}\varphi_\alpha = (f)$, wobei f ein Polynom kleinsten Grades

f eindeutig bis auf Multiplikation mit $c \in K[X]^* = K \setminus \{0\}$

$\rightsquigarrow f$ eindeutig nach Normierung. Wegen $K[X]/(f)$ Intring $\rightsquigarrow (f)$ prim $\rightsquigarrow f$ prim $\rightsquigarrow f$ irreduzibel.

3.2.7 Def. f aus Lemma 3.3.6 heißt Minimalpolynom zu α.

3.2.8 Satz $K \subset L$ Körpererw., $\alpha \in L$ algebraisch über K, $f \in K[X]$ Minimalpolynom zu α. Dann gilt $[K[\alpha] : K] = \operatorname{grad} f$ und $1 = \alpha^0, \alpha, \dots, \alpha^{\operatorname{grad} f - 1}$ ist Basis in $K[\alpha]$ über K.

Beweis Sei $n = \operatorname{grad} f$. Sei $\beta \in K[\alpha]$, also $\beta = g(\alpha)$, $g \in K[X]$

Division mit Rest $\rightsquigarrow \exists\, q, r \in K[X]: g = qf + r$, $\operatorname{grad} r < n$. $\rightsquigarrow$

$\beta = g(\alpha) = q(\alpha)f(\alpha) + r(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i\alpha^i$, $c_0, \dots, c_{n-1} \in K \rightsquigarrow \{\alpha^i\}_{i=0}^{n-1}$ Erzeugendensystem.

Lin. unabh: $\sum_i \lambda_i\alpha^i = 0 \rightsquigarrow g = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i X^i \in \operatorname{Ker}\varphi_\alpha = (f) \rightsquigarrow f \mid g$

$\operatorname{grad} f = n \rightsquigarrow g = 0 \rightsquigarrow \lambda_i = 0$. ∎

3.2.9 Bsp. (a) Sei $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Das Elem $i \in \mathbb{C}$ ist alg. und sein Minimalpolynom ist $X^2 + 1$.

(b) $p \in \mathbb{N}$ Primzahl, $n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow \sqrt[n]{p}$ ist alg über $\mathbb{Q}$, da $f(\sqrt[n]{p}) = 0$ für $f = X^n - p$; f irred nach Eisenstein $\rightsquigarrow f$ Minimalpol von $\sqrt[n]{p}$ über $\mathbb{Q}$, insb. $[\mathbb{Q}[\sqrt[n]{p}] : \mathbb{Q}] = n$

3.2.10 Satz $K \subset L$ endlich $\Leftrightarrow$ $K \subset L$ algebraisch und L ist endlich erzeugt als Körper über K (d.h. $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n : L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$)

Beweis "$\Rightarrow$" $\alpha \in L$ transzendent $\Leftrightarrow 1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n, \dots$ lin. unabh. über K, also $K \subset L$ endlich $\Rightarrow K \subset L$ alg.

Ist nun $L = K$, so $L = K(\emptyset)$. Ist $L \neq K$ wähle $\alpha_1 \in L \setminus K$

Wenn $K[\alpha_1] \neq L$ wähle $\alpha_2 \in L \setminus K[\alpha_1]$ usw. Wegen

$$[K[\alpha_1] : K] < [K[\alpha_1, \alpha_2] : K] < \dots < [L : K]$$

das Verfahren bricht ab

"$\Leftarrow$" Ist $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ mit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ alg über K, so gilt $K \subset K(\alpha_1)$, $K(\alpha_1) \subset K(\alpha_1, \alpha_2)$, ... endlich nach 3.3.8. Nach dem Gradsatz $\rightsquigarrow [L : K] < \infty$. ∎

3.2.11 Bem Sei $K \subset L$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ algebraisch $\rightsquigarrow K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ algebraisch d.h. jedes Elem von $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ alg.

z.B. $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ist alg. Sein Minimalpol. ist $f = (X^2 - 5)^2 - 24$, da $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$. Es gilt eigentlich $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

3.2.12 Satz $K \subset L \subset M$ Körpererweiterungen. Dann:

$K \subset M$ algebraisch $\Leftrightarrow$ $K \subset L$ und $L \subset M$ algebraisch.