

Beweis „ $\Leftarrow$ “. Sei $\alpha \in M$ beliebig. Z.z. α alg./K. Sei $f \in L[X]$ das Minimalpolynom zu α über L , $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i$.

Da $K \subset L$ alg., ist $[K[c_1, \dots, c_n] : K] < \infty$.

Außerdem α alg. über $K[c_1, \dots, c_n] \leadsto K[c_1, \dots, c_n][\alpha] = K[c_1, \dots, c_n](\alpha) = K(c_1, \dots, c_n, \alpha)$ endlich über $K[c_1, \dots, c_n] \leadsto$ endlich über $K \leadsto K(\alpha)$ endlich über $K \leadsto \alpha$ alg./K.
3.3.10 $\square$

§ 3.2 Algebraisch abgeschlossener Körper

3.2.1 Bem K Körper, $f \in K[X]$, $\alpha \in K$ Nullstelle $\leadsto \exists g \in K[X]$ mit $f = (X - \alpha)g$ (denn $f = (X - \alpha)g + r$, $\deg r < 1$ also $r \in K$ und $0 = f(\alpha) = (\alpha - \alpha)g(\alpha) + r \leadsto r = 0$)
 $X - \alpha$ ist prim in $K[X]$. $\leadsto k = \text{Vielfachheit von } X - \alpha$ in der Primfaktorzerl. von f ; k heißt auch Vielfachheit der Nullstelle α von f . Ist $\deg f = n \leadsto f$ hat höchstens n Nullstellen gezählt mit Vfh)

3.2.2 Def. (i) Ein Körper K heißt algebraisch abgeschlossen wenn jedes $f \in K[X]$ mit $\deg f \geq 1$ besitzt eine Nullstelle in K . (ii) Ein Erweiterungskörper $\bar{K} \supset K$ heißt ein alg. Abschluß von K , wenn $K \subset \bar{K}$ algebraisch und $\bar{K}$ alg. abgeschl.

3.3.3 Bem Äquivalent:

- (i) K alg. abgeschlossen (ii) Jedes $f \in K[X]$, $\deg f \geq 1$ zerfällt in Linearfaktoren: $f = c \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$, $n = \deg f$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, $c \neq 0$.
- (iii) Jedes irreduzible Polynom in $K[X]$ ist linear
- (iv) Ist $K \subset L$ eine alg. Erweiterung, so $K = L$.

3.3.4 Fundamentalsatz der Algebra

$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

(61)

3.9.5 Satz $K \subset L$ Körpererweiterung, L alg. abgeschl.

Sei $\overline{K} = \{\alpha \in L : \alpha \text{ alg. über } K\}$. Dann ist $\overline{K}$ ein alg.

Abschluß von K .

Beweis Seien $\alpha, \beta \in \overline{K}$. Dann ist $K(\alpha, \beta) \subset \overline{K}$ wegen 3.3.12

insb. $\alpha + \beta, \alpha\beta$, und falls $\beta \neq 0$, $\alpha\beta^{-1} \in \overline{K} \leadsto \overline{K}$ Körper.

Sei $f \in \overline{K}[X]$ mit $\deg f \geq 1 \leadsto f$ hat eine Nullstelle $\alpha \in L$

(da L alg. abgeschl.) $\leadsto \alpha \text{ alg. über } K \xrightarrow[3.3.11]{\overline{K} \text{ alg. über } K} \alpha \text{ alg. über } \overline{K} \leadsto \alpha \in \overline{K}$

Also $\overline{K}$ ist alg. abgeschl. $\square$

3.9.6 Satz (Verfahren von Kronecker)

$f \in K[X]$ irred., $n = \deg f \geq 1 \leadsto \exists$ Körpererw. $K \subset L$

mit $[L:K] = n$ (insb. $K \subset L$ alg.) so dass f eine Nullstelle in L hat.

Beweis O.B.d.A. f normiert. f irred. $\Rightarrow (f)$ maximal

$\Rightarrow L := K[X]/(f)$ Körper; $K \rightarrow L, a \mapsto a + (f)$ inj

also $K \subset L$. Sei $\alpha := \widehat{X} := X + (f) \in L \leadsto f(\alpha) = \sum a_i \widehat{X}^i = \widehat{\sum a_i X^i} = \widehat{f} = 0$

$\in L$. Außerdem gilt $L = K[\alpha]$; f irred., normiert

$\leadsto f$ Minimalpolynom von $\alpha \leadsto [L:K] = n$. $\square$

3.9.10 Satz K Körper $\Rightarrow \exists$ Körpererw. $K \subset L$ mit L alg. abg.

Insb. gilt nach 3.9.5: K besitzt einen alg. Abschluß $\overline{K}$.

Beweis (1) Polynomringe in unendl. vielen Variablen:

$\mathcal{X} = (Y_i)_{i \in I} \leadsto K[\mathcal{X}] = \{\text{Polynome in } \mathcal{X} \text{ mit Koeff. in } K\}$.

(2) Sei $\mathcal{X} = (Y_f)_{f \in I}$ mit $I = \{f \in K[X] : \deg f \geq 1\}$. Setze

$\mathcal{O} := (\{f(Y_f) : f \in I\})$ Ideal in $K[\mathcal{X}]$.

(3) $\mathcal{O} \neq K[\mathcal{X}]$. Sonst $1 \in \mathcal{O}$ d.h. $\exists f_1, \dots, f_n \in I, g_1, \dots, g_n \in K[X]$

mit $1 = \sum g_i f_i(Y_{f_i})$. Satz 3.9.6 $\leadsto \exists$ Körpererw. $K' \supset K$