19. Vorlesung, 15.12.2010 (62)

so dass jedes f_i hat eine Nullstelle $\alpha_i \in K'$. Dann gilt in $K'[X]$: $1 = \sum g_i f_i(\alpha_i) = 0$ ↯

(4) Es gibt ein maximales Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m} \subset K[\mathfrak{X}]$.

Dabei brauchen wir das Lemma von Zorn. Eine Menge M heißt partiell geordnet wenn eine Ordnung-Relation $\leq$ auf M existiert (d.h. $\leq$ ist Reflexiv, Transitiv, Antisymmetrisch). Die Ordnung heißt total, wenn für alle $x, y \in M$ stets $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt.
Z.B. ist A eine Menge mit mehr als zwei Elem., so ist $(\mathcal{P}(A), \subset)$ partiell aber nicht total geordnet.

Zornsches Lemma Sei $(M, \leq)$ partiell geordnet, so dass jede total geordnete Teilmenge eine obere Schranke in M besitzt. Dann besitzt M ein maximales Element (i.e. ein Elem. $m \in M$ mit $m \leq a \Rightarrow m = a$)
Betrachte nun $(M, \leq) = (\{ \mathfrak{b} \text{ Ideal in } K[\mathfrak{X}] : \mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \neq K[\mathfrak{X}] \}, \subset)$
Ist $\mathcal{B} \subset (M, \leq)$ total geordnet, so ist $\bigcup_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}} \mathfrak{b} \in M$ eine obere Schranke für $\mathcal{B}$. Zornsches Lemma $\rightsquigarrow$ Behauptung.

(5) Sei $L_1 = K[\mathfrak{X}]/\mathfrak{m}$. Da $\mathfrak{m}$ maximal, ist L_1 Körper.
$K \subset L_1$ via $a \mapsto a + \mathfrak{m}$ (injektiv wegen $\mathfrak{m} \cap K = \{0\}$)
Jedes $f \in K[X]$, grad $f \geq 1$ hat die Nullstelle $Y_f + \mathfrak{m} \in L_1$ (wie in 3.9.6)

(6) Wende nun dasselbe Verfahren für L_1 anstelle von K an und iteriere das Verfahren $\rightsquigarrow K = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_n \subset L_{n+1} \subset \dots$
so dass für alle $f \in L_n[X]$, grad $f \geq 1$ eine Nullstelle in L_{n+1} gibt.
Setze $L := \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n \rightsquigarrow L$ Körper und jedes $f \in L[X]$, grad $f \geq 1$ hat eine Nullstelle in L (da $\exists n$ mit $f \in L_n[X]$) $\rightsquigarrow L$ alg. abgeschl.

Bem. Das Zornsche Lemma ist zum Auswahlaxiom äquivalent, also unabh. von den Axiomen der Mengenlehre. Zorn hat das Lemma 1935 in Algebra benutzt, sie wurde schon in der Topologie 1922 von Kuratowski eingeführt.

3.9.11 Satz (Eindeutigkeit). Seien $\overline{K_1}, \overline{K_2}$ alg. Abschlüsse von K. Dann gibt es ein Isomorphismus $\tau: \overline{K_1} \to \overline{K_2}$ mit $\tau|_K = \mathrm{Id}_K$.

3.3.9 Bem. Ein Körperhomom. $\sigma: K \to L$ induziert ein Homom. $\sigma: K[X] \to L[X]$, $\sum a_i X^i \mapsto \sum \sigma(a_i) X^i$, $f \mapsto \sigma(f) =: f^\sigma$

Ist $\alpha \in K$ Nullstelle von f, so $\sigma(\alpha)$ Nullstelle von f^σ:

$$f^\sigma(\sigma(\alpha)) = \sum \sigma(a_i)\,\sigma(\alpha)^i = \sigma\left(\sum a_i \alpha^i\right) = \sigma(0) = 0.$$

3.3.10 Lemma Sei $K \subset K'$ Körpererw., $\alpha \in K'$ alg$/K$, $f \in K[X]$ Minimalpol. zu α. Sei $\sigma: K \to L$ ein Körperhomom.

(i) Ist $\sigma': K(\alpha) \to L$ Homom mit $\sigma'|_K = \sigma$, so $\sigma'(\alpha)$ Nullstelle von $f^{\sigma'} = f^\sigma \in L[X]$

(ii) Ist $\beta \in L$ Nullstelle von f^σ, so $\exists!$ Homom $\sigma': K(\alpha) \to L$ mit $\sigma'|_K = \sigma$ und $\sigma'(\alpha) = \beta$.

Beweis (i) klar nach 3.9.12, da $f^{\sigma'} = f^\sigma$.

(ii) Existenz: Sei $\psi: K[X] \to L$, $g \mapsto g^\sigma(\beta) \rightsquigarrow (f) \subset \operatorname{Ker}\psi$

$$\rightsquigarrow \begin{tikzcd} K[X] \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & L \\ K[X]/(f) \cong K[\alpha] \arrow[ur, "\overline{\psi}"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd} \rightsquigarrow \forall a \in K: \overline{\psi}(a) = \psi(a) = \sigma(a) \text{ und}$$

$$\overline{\psi}(\alpha) = \overline{\psi}(X + (f)) = \psi(X) = \beta$$

$$\rightsquigarrow \sigma' = \overline{\psi} \text{ OK}$$

Eindeutigkeit: klar, da $K(\alpha) = K[\alpha]$. ∎

3.3.11 Satz Sei $K \subset K'$ alg. Körpererw., L alg. abgeschl., $\sigma: K \to L$ Körperhomom. Dann:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\sigma"'] & K' \arrow[d, dashed, "\sigma'"] \\ & L \end{tikzcd}$$

(i) $\exists\, \sigma': K' \to L$ mit $\sigma'|_K = \sigma$

(ii) Sind K', L alg. Abschlüsse von K bzw. $\sigma(K)$ so ist jedes σ' aus (i) ein Isomorphismus.

Insb. gilt Satz 3.3.8 (mit $K' = \overline{K_1}$, $L = \overline{K_2}$, $\sigma: K \xhookrightarrow{\text{Inkl}} \overline{K_2}$, $\tau = \sigma'$).

Beweis (i) Sei $M = \{(F, \tau) : K \subset F \subset K', \tau: F \to L, \tau|_K = \sigma\}$

Es gilt $(K, \sigma) \in M$ also $M \neq \emptyset$. M ist partiell geordnet mit $(F, \tau) \leq (F', \tau') :\Longleftrightarrow F \subset F'$ und $\tau'|_F = \tau$.