Jede total geordnete Teilmenge $\{(F_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ hat eine obere Schranke (F, τ) mit $F = \bigcup_{i\in I} F_i$, $\tau : F \to L$, $\tau|_{F_i} = \tau_i$.

Zornsches Lemma $\rightsquigarrow$ M hat ein maximales Elem (F, τ). Z.z. $F = K'$ (dann $\sigma' := \tau$). Sonst sei $\alpha \in K' \setminus F$; α alg/K $\rightsquigarrow$ α alg/F.
Sei $f \in F[X]$ das Minimalpol. von α. L alg. abgeschl $\rightsquigarrow$ f^τ hat eine Nullstelle in L. Lemma 3.3.10(ii) $\rightsquigarrow$ $\exists\, \tau' : F(\alpha) \to L$ mit $\tau'|_F = \tau$. Widerspruch zur Maximalität von (F, τ)!

(ii) K' alg. abgeschl. $\rightsquigarrow$ $\sigma'(K')$ alg. abgeschl.
($g \in \sigma'(K')[X]$ $\rightsquigarrow$ $\exists f \in K'[X] : g = f^{\sigma'}$; f zerfällt in Linearfaktoren $\overset{3.3.10(i)}{\rightsquigarrow}$ $f^{\sigma'}$ zerfällt auch)
L alg/$\sigma(K)$ $\rightsquigarrow$ L alg/$\sigma'(K')$ $\underset{3.3.3(iv)}{\rightsquigarrow}$ $L = \sigma'(K')$
$\rightsquigarrow$ $\sigma' : K' \to L$ surjektiv. Jeder Körperhomom. ist aber injektiv $\rightsquigarrow$ σ' Isomorphismus. ▨

§ 3.4. Zerfällungskörper

3.4.1 Def. Seien $K \subset L_1$, $K \subset L_2$ zwei Körpererw. Ein K-Homom. von L_1 nach L_2 ist ein Homom $\sigma : L_1 \to L_2$ mit $\sigma|_K = \mathrm{Id}_K$.
Notation: $\mathrm{Hom}_K(L_1, L_2)$. Analog: K-Isomorphismus; L_1 und L_2 heißen K-isomorph, falls $\exists$ K-Isom. $\sigma : L_1 \to L_2$.
Ist $K \subset L$ Körpererw, so $\mathrm{Aut}_K(L) := \{\sigma \in \mathrm{Aut}(L) ;\ \sigma|_K = \mathrm{Id}_K\}$, die Elem heißen K-Automorphismen.

3.4.2 Bem. Sei P Primkörper von K $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Aut}(K) = \mathrm{Aut}_P(K)$
($\sigma \in \mathrm{Aut}(K) \Rightarrow \sigma(1) = 1 \Rightarrow \sigma|_{\mathrm{Im}\,\varphi} = \mathrm{Id}$ für $\varphi : \mathbb{Z} \to K$, $n \mapsto n\cdot 1 \in K$
$\Rightarrow \sigma|_{Q(\mathrm{Im}\,\varphi)} = \mathrm{Id}$)

3.4.3 Def Ein Erweiterungskörper $L \supset K$ heißt Zerfällungskörper von $f \in K[X]$, falls
(i) f zerfällt in $L[X]$ in Linearfaktoren
(ii) $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ sind die Nst. von f.

3.4.4 Bem. Zu jedem $f \in K[X]$ gibt es einen Zerfällungskörper, nämlich $K(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \subset \overline{K}$, wobei $\overline{K}$ einen alg. Abschluss von K ist, $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \overline{K}$ Nullstellen von f in $\overline{K}$.

3.4.5 Satz Je zwei Zerfällungskörper L_1, L_2 von $f \in K[X]$ sind K-isomorph.

Genauer: Für jedes $\sigma \in \mathrm{Hom}_K(L_1, \overline{L}_2)$ gilt $\sigma(L_1) = L_2$ also $\sigma \in \mathrm{Isom}_K(L_1, L_2)$.

Nicht-leer, da die Inklusion $K \hookrightarrow \overline{L}_2$ besitzt eine Fortsetzung $L_1 \to \overline{L}_2$ nach 3.3.11

Beweis

OBdA f normiert.

Seien $a_1,\dots,a_n \in L_1$ Nullstellen von f, $b_1,\dots,b_n \in L_2$ die in $L_2 \subset \overline{L}_2$

Sei $\sigma \in \mathrm{Hom}_K(L_1, \overline{L}_2)$. Dann gilt

$$f^\sigma = (X-\sigma(a_1))\dots(X-\sigma(a_n)) \text{ in } \overline{L}_2[X]$$

in $K[X]$ $\longrightarrow$ $\|$

$$f = (X-b_1)\dots(X-b_n) \text{ in } L_2[X]$$

Das Polynom f hat also die Nullstellen $(b_1,\dots,b_n)$ und $(\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n))$ in $\overline{L}_2$ $\rightsquigarrow$ nach eventueller Umordnung $\sigma(a_1)=b_1,\dots,\sigma(a_n)=b_n$

$\rightsquigarrow$ $L_2 = K(b_1,\dots,b_n) = K(\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)) = \sigma(K(a_1,\dots,a_n)) = \sigma(L_1)$ $\square$

3.4.6 Satz Sei $K \subset L$ endliche Körpererw. Äquivalent:

(ii) Für jedes $\sigma \in \mathrm{Hom}_K(L, \overline{L})$ gilt $\sigma(L) = L$, also $\sigma \in \mathrm{Aut}_K(L)$.

(i) L ist Zerfällungskörper eines Polynoms $f \in K[X]$.

(iii) Jedes irred. Polynom $g \in K[X]$, das eine Nullstelle in L besitzt, zerfällt in $L[X]$ schon vollständig in Linearfaktoren.

Ist eine dieser Bedingungen erfüllt, so heißt die endl. Körpererw. normal

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii) gilt nach 3.4.5

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sei $g \in K[X]$ irred, $\alpha \in L$ Nullstelle von g.

OBdA g normiert, also g Minimalpolynom zu α.

Für jede Nullstelle $\beta \in \overline{L}$ von g, $\exists\, \sigma : K(\alpha) \to \overline{L}$ mit