

3.5.5. Def Sei $K \subset L$ algebraische Körpererw. Dann heißt
 $[L:K]_s := |\text{Hom}_K(L, \bar{K})|$ der Separabilitätsgrad von L über K .
 (wohldef.: Sind $\bar{K}_1, \bar{K}_2$ zwei alg. Abschlüsse von $K \xrightarrow{3.3.8}$
 $\exists z \in \text{Isom}_K(\bar{K}_1, \bar{K}_2) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_K(L, \bar{K}_1) \ni \sigma \mapsto z \circ \sigma \in \text{Hom}_K(L, \bar{K}_2)$
 ist bijektiv $\leadsto$ Anzahl der Elem. gleich). z.B. $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}]_s = 1$.

3.5.6 Lemma Sei $K \subset L$ eine einfache alg. Körpererw.
 d.h. $\exists \alpha \in L$ alg. / K mit $L = K(\alpha)$. Sei $f \in K[X]$ das Minpol. zu α .
 (i) $[L:K]_s =$ Anzahl der verschiedenen Nst. von f in $\bar{K}$
 (jede Nst. $\beta \in \bar{K}$ entspricht genau ein $\sigma \in \text{Hom}_K(L, \bar{K})$ mit $\sigma(\alpha) = \beta$)
 (ii) α separabel über $K \iff [L:K]_s = [L:K]$
 (iii) Ist $\text{char } K = p > 0$ und α von Vielfachheit p^r , so
 $[L:K]_s = p^{-r} [L:K]$

Beweis (i) ist genau 3.3.10(ii), angewandt auf $\sigma = \text{Inkl} : K \hookrightarrow \bar{K}$
 (ii) α separabel $\iff f$ separabel $\iff$ Anzahl von verschiedenen Nst
 von f in $\bar{K} = \text{grad } f \xLeftrightarrow{(i)} [L:K]_s = [K(\alpha):K] = [L:K]$.
 (iii) $[L:K]_s \stackrel{(i)}{=} \text{Anzahl versch. Nst. von } f = \frac{\text{grad } f}{p^r} = \frac{[L:K]}{p^r}$

(Blatt 12)

3.5.7. Gradsatz für Separabilitätsgrad

Seien $K \subset L, L \subset M$ alg. Körpererw. Dann $[M:K]_s = [M:L]_s \cdot [L:K]_s$.

Beweis Sei $\bar{K}$ ein alg. Abschluss von M , also auch von L, K nach Satz 3.2.12. Sei $\sigma \in \text{Hom}_K(L, \bar{K})$ und $\bar{\sigma} \in \text{Hom}_K(\bar{K}, \bar{K})$ eine Fortsetzung; $\bar{\sigma}$ existiert und ist Isom nach 3.3.11. Betrachte $\Phi: \text{Hom}_K(L, \bar{K}) \times \text{Hom}_L(M, \bar{K}) \rightarrow \text{Hom}_K(M, \bar{K}), (\sigma, \tau) \mapsto \bar{\sigma} \circ \tau$

Wir zeigen, dass Φ ist bijektiv ($\leadsto$ Behauptung). $\bar{\sigma}_1 \text{ inj}$

Φ Injektiv: $\bar{\sigma}_1 \circ \tau_1 = \bar{\sigma}_2 \circ \tau_2 \implies \bar{\sigma}_1|_L = \bar{\sigma}_2|_L \implies \sigma_1 = \sigma_2 \implies \bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 \implies \tau_1 = \tau_2$

Φ surj: Sei $\varphi \in \text{Hom}_K(M, \bar{K})$. Setze $\sigma = \varphi|_L \leadsto \sigma \in \text{Hom}_K(L, \bar{K})$

Setze $\tau = \sigma^{-1} \circ \varphi \leadsto \tau|_L = \text{Id}_L \leadsto \tau \in \text{Hom}_L(M, \bar{K})$. $\blacksquare$

3.5.8 Satz Sei $K \subset L$ endliche Körpererw. Dann gilt:

(i) $\text{char } K = 0 \leadsto [L:K] = [L:K]_s$

(ii) $\text{char } K = p > 0 \leadsto \exists r \in \mathbb{N}_0: [L:K] = p^r [L:K]_s$

Beweis Sei $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $K_i := K(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$ also $K_{i+1} = K_i(\alpha_{i+1})$

(i) $\text{char } K = 0 \xrightarrow{3.5.4(i)} K \text{ vollkommen} \leadsto \alpha_{i+1} \text{ separabel} \xrightarrow{3.5.6(ii)}$

$$[K_{i+1}:K_i]_s = [K_{i+1}:K_i] \xrightarrow{\text{Gradsatz}} [L:K] = [K_1:K] \cdot [K_2:K_1] \cdot \dots = [K_1:K]_s [K_2:K_1]_s \cdot \dots = [L:K]_s$$

(ii) $3.5.6(iii) \leadsto \exists r_i \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } [K_{i+1}:K_i]_s = \frac{[K_{i+1}:K_i]}{p^{r_i}} \quad \square$

3.5.9 Lemma Seien $K \subset L \subset M$ Körpererw., $\alpha \in M$ alg./K

Seien $f_K \in K[X]$ bzw. $f_L \in L[X]$ Minimalpol. von α über K bzw. L

Dann gilt $f_L \mid f_K$ in $L[X]$. Insb.: ist α sep. über K so auch sep. über L .

Beweis $f_K(\alpha) = 0 \leadsto f_K \in (f_L) \text{ in } L[X] \leadsto f_L \mid f_K \quad \square$

3.5.10 Satz Sei $K \subset L$ endliche Körpererw., Äquivalent:

(i) $K \subset L$ separabel (ii) $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in L \text{ sep./}K: L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

(iii) $[L:K]_s = [L:K]$.

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii) Übung; (ii) $\Rightarrow$ (iii) Wende 3.5.6(ii) und Gradsätzen (Induktion nach n ; beachte 3.5.9)

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sei $\alpha \in L$, $f \in K[X]$ zugehöriges Minpol. z.z. f separabel
 $\text{char } K = 0 \xrightarrow{3.5.4(i)} \text{Beh.}$ Sei $\text{char } K = p > 0 \leadsto \exists r \in \mathbb{N}_0$: jede Nst von f hat vfh p^r . Also

$$[L:K] = \underbrace{[L:K(\alpha)]}_{\geq [L:K(\alpha)]_s} \cdot \underbrace{[K(\alpha):K]}_{= [K(\alpha):K]_s p^r} \geq [L:K]_s \cdot p^r = [L:K] p^r \geq [L:K]$$

$\leadsto r = 0 \leadsto f$ separabel. $\square$

3.5.11 Korollar Seien $K \subset L \subset M$ alg. Körpererw. Dann

$K \subset L, L \subset M$ separabel $\Leftrightarrow K \subset M$ separabel.