24. Vorlesung, 17.01.11. (74)

<u>4.1.7 Korollar</u> Sei $K \subset L$ galois. Dann ist der Fixkörper von $\mathrm{Aut}_K(L)$ genau K. Insb. gilt: Eine endliche Körpererw. $K \subset L$ ist galois $\Longleftrightarrow$ K Fixkörper einer endl. UG von $\mathrm{Aut}(L)$.

<u>4.1.8 Hauptsatz der Galois-Theorie</u>

Sei $K \subset L$ galois. Setze $\mathcal{G} = \{\text{Untergruppen von } \mathrm{Gal}(L/K)\}$, $\mathcal{K} = \{\text{Zwischenkörper von } K \subset L\}$. Dann gilt:

(i) Die Abbildungen $\mathcal{G} \to \mathcal{K}$, $H \mapsto L^H$ und $\mathcal{K} \to \mathcal{G}$, $E \to \mathrm{Gal}(L/E)$ sind bijektiv und invers zueinander.

(ii) Für jedes $E \in \mathcal{K}$ gilt $[L:E] \overset{4.1.4}{=} \mathrm{ord}\, \mathrm{Gal}(L/E)$, $[E:K] = (\mathrm{Gal}(L/K) : \mathrm{Gal}(L/E))$

(iii) Für $E \in \mathcal{K}$ gilt: $K \subset E$ galois $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Gal}(L/E) \lhd \mathrm{Gal}(L/K)$ $\Longleftrightarrow$ $\forall \sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$: $\sigma(E) = E$

In diesem Fall hat der surj. Homom (4.1.3) $\varphi: \mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Gal}(E/K)$, $\sigma \mapsto \sigma|_E$ den Kern $\mathrm{Gal}(L/E)$, also $\mathrm{Gal}(E/K) \cong \mathrm{Gal}(L/K)/\mathrm{Gal}(L/E)$

<u>Beweis</u> (i) $\mathrm{Gal}(L/L^H) = H$ nach 4.1.6 und $L^{\mathrm{Gal}(L/E)} = E$ nach 4.1.7.

(ii) 4.1.4 $\rightsquigarrow$ $\mathrm{ord}\, \mathrm{Gal}(L:K) = [L:K]$ und $[L:K] = [L:E][E:K]$, $\mathrm{ord}\, \mathrm{Gal}(L/K) = \mathrm{ord}\, \mathrm{Gal}(L/E) \cdot (\mathrm{Gal}(L/K) : \mathrm{Gal}(L/E))$.

(iii) Sei $K \subset E$ galois. 4.1.3 $\rightsquigarrow$ φ surj. Außerdem $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K) : \sigma|_E = \mathrm{Id}\}$ $= \mathrm{Gal}(L/E) \lhd \mathrm{Gal}(L/K)$ und Isomorphiesatz $\rightsquigarrow$ erstes „$\Rightarrow$"

Zum zweiten „$\Rightarrow$": $\forall \sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$: $\mathrm{Aut}_{\sigma(E)}(L) = \sigma\, \mathrm{Aut}_E(L)\, \sigma^{-1}$

Voraussetzung: $\lhd$ $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Gal}(L/E) = \mathrm{Gal}(L/\sigma(E))$ $\underset{(i)}{\rightsquigarrow}$ $E = \sigma(E)$

3. Aussage $\Rightarrow$ 1. Aussage: K ist der Fixkörper zu $\mathrm{Gal}(L/K)$ in L $\rightsquigarrow$ K ist der Fixkörper zu $\{\sigma|_E : \sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)\} \underset{\text{Voraus.}}{\subset} \mathrm{Aut}(E)$ $\underset{4.1.7}{\rightsquigarrow}$ $K \subset E$ galois. ▨

<u>4.1.9 Korollar</u> Jede endliche separable Körpererw. $K \subset L$ besitzt nur endlich viele Zwischenkörper.

<u>Beweis</u> Suche $L \subset L'$ mit $K \subset L'$ galois, dann folgt die Beh. aus 4.1.8

Sei $L = K(\alpha)$ (nach 3.5.12), $f \in K[X]$ Minpol zu α; f ist sep. Setze $L' = K(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ wobei α_i die übrigen Nst von f in $\bar{K}$ $\rightsquigarrow$ $K \subset L'$ galois da L' = Zerfkö des separablen Pol. f (siehe 4.1.2). ▨

<u>4.1.10 Bsp.</u> (i) $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$; L ist Zerfällungskörper des Pol. $(X^2-2)(X^2-3) \underset{4.1.2}{\rightsquigarrow} K \subset L$ galois; $[L:K] = \underbrace{[L:\mathbb{Q}(\sqrt{2})]}_{=2}\underbrace{[\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}]}_{=2} = 4$

Bem. 4.1.4 $\rightsquigarrow$ ord $\mathrm{Gal}(L/K) = 4$. Genauer:

$G = \mathrm{Gal}(L/K) = \{e, \sigma, \tau, \sigma\tau\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong V_4$ mit $\sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$, $\sigma(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$, $\tau(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, $\tau(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$; Tabelle:

	Id	σ	τ	$\sigma\tau$
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$

In der Tat $\underbrace{\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})}_{\text{galois}} \subset L \underset{4.1.3}{\rightsquigarrow} \forall \varphi \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}): \varphi|_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})} \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$

also $\varphi(\sqrt{2}) \in \{\pm\sqrt{2}\}$, Analog $\varphi(\sqrt{3}) \in \{\pm\sqrt{3}\}$.

Galois-Korrespondenz:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) & \\
\{\mathrm{Id}, \sigma\} \arrow[ur] & \{\mathrm{Id}, \sigma\tau\} \arrow[u] & \{\mathrm{Id}, \tau\} \arrow[ul] \\
 & \{e\} \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{c} H \mapsto L^H \\ \longleftrightarrow \\ \mathrm{Gal}(L/E) \leftarrow\!\shortmid E \end{array}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathbb{Q} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \arrow[dr] & \mathbb{Q}(\sqrt{6}) \arrow[d] & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \arrow[dl] \\
 & \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) &
\end{tikzcd}$$

Alle UG von G sind normal, da G abelsch $\rightsquigarrow$ alle Zwischenkörp. sind galois. Die zugeh. Galois-Gruppen sind jeweils $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(ii) $K = \mathbb{Q}$, $L =$ Zerfällungskörper von $X^3 - 2 = f$.

Nullstellen von f in $\mathbb{C}$: $\alpha_1 = \sqrt[3]{2}$, $\alpha_2 = \zeta\sqrt[3]{2}$, $\alpha_3 = \zeta^2\sqrt[3]{2}$ mit $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

Also $L = \mathbb{Q}(\zeta, \sqrt[3]{2})$. Bsp. 4.1.5 $\rightsquigarrow$ ord $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) = [L:\mathbb{Q}] = 6$.

Also $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong S_3$ oder $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Wir zeigen, es ist S_3.

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\zeta)$ ist galois (Zerf.körper von $X^2 + X + 1$) $\underset{4.1.3}{\rightsquigarrow} \forall \varphi \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$

$\varphi(\zeta) \in \{\zeta, \bar{\zeta} = \zeta^2\}$

	Id	σ	τ	$\tau\sigma$	τ^2	$\tau^2\sigma$
$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$\zeta\sqrt[3]{2}$	$\zeta\sqrt[3]{2}$	$\zeta^2\sqrt[3]{2}$	$\zeta^2\sqrt[3]{2}$
ζ	ζ	ζ^2	ζ	ζ^2	ζ	ζ^2

$\sigma\tau = \tau^2\sigma \neq \tau\sigma$

also $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ ist nicht abelsch $\rightsquigarrow$ isomorph zu S_3