

4.1.7 Korollar. Sei $K \subset L$ galois. Dann ist der Fixkörper von $\text{Aut}_K(L)$ genau K . Insb. gilt: Eine endliche Körpererw. $K \subset L$ ist galois $\Leftrightarrow K$ Fixkörper einer endl. UG von $\text{Aut}(L)$.

4.1.8 Hauptsatz der Galois-Theorie

Sei $K \subset L$ galois. Setze $\mathcal{G} = \{\text{Untergruppen von } \text{Gal}(L/K)\}$,

$\mathcal{K} = \{\text{Zwischenkörper von } K \subset L\}$. Dann gilt:

(i) Die Abbildungen $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{K}, H \mapsto L^H$ und $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{G}, E \mapsto \text{Gal}(L/E)$ sind bijektiv und invers zueinander.

(ii) Für jedes $E \in \mathcal{K}$ gilt $[L:E] \stackrel{4.1.4}{=} \text{ord Gal}(L/E)$, $[E:K] = (\text{Gal}(L/K) : \text{Gal}(L/E))$

(iii) Für $E \in \mathcal{K}$ gilt: $K \subset E$ galois $\Leftrightarrow \text{Gal}(L/E) \triangleleft \text{Gal}(L/K) \Leftrightarrow \forall \sigma \in \text{Gal}(L/K) : \sigma(E) = E$

In diesem Fall hat der surj. Homom. (4.1.3) $\varphi: \text{Gal}(L/K) \rightarrow \text{Gal}(E/K)$,

$\sigma \mapsto \sigma|_E$ den Kern $\text{Gal}(L/E)$, also $\text{Gal}(E/K) \cong \text{Gal}(L/K) / \text{Gal}(L/E)$

Beweis (i) $\text{Gal}(L/L^H) = H$ nach 4.1.6 und $L^{\text{Gal}(L/E)} = E$ nach 4.1.7.

(ii) 4.1.4 $\leadsto \text{ord Gal}(L:K) = [L:K]$ und $[L:K] = [L:E][E:K]$,
 $\text{ord Gal}(L/K) = \text{ord Gal}(L/E) \cdot (\text{Gal}(L/K) : \text{Gal}(L/E))$.

(iii) Sei $K \subset E$ galois. 4.1.3 $\leadsto \varphi$ surj. Außerdem $\text{Ker } \varphi = \{\sigma \in \text{Gal}(L/K) : \sigma|_E = \text{Id}\} = \text{Gal}(L/E) \triangleleft \text{Gal}(L/K)$ und Isomorphiesatz $\leadsto$ erstes " $\Rightarrow$ "

Zum zweiten " $\Rightarrow$ ": $\forall \sigma \in \text{Gal}(L/K) : \text{Aut}_{\sigma(E)}(L) = \sigma \text{Aut}_E(L) \sigma^{-1}$

Voraussetzung: $\triangleleft \leadsto \text{Gal}(L/E) = \text{Gal}(L/\sigma(E)) \stackrel{(i)}{\leadsto} E = \sigma(E)$

3. Aussage $\Rightarrow$ 1. Aussage: K ist der Fixkörper zu $\text{Gal}(L/K)$ in L

$\leadsto K$ ist der Fixkörper zu $\{\sigma|_E : \sigma \in \text{Gal}(L/K)\} \subset \text{Aut}(E)$
 Voraus.

$\leadsto K \subset E$ galois.

4.1.7

4.1.9 Korollar Jede endliche separable Körpererw. $K \subset L$ besitzt nur endlich viele Zwischenkörper.

Beweis Suche $L \subset L'$ mit $K \subset L'$ galois, dann folgt die Beh. aus 4.1.8

Sei $L = K(\alpha)$ (nach 3.5.12), $f \in K[X]$ Minpol zu α ; f ist sep. Setze

$L' = K(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ wobei α_i die übrigen Nst von f in $\bar{L} \leadsto K \subset L'$ galois

da $L' = \text{Zerfko}$ des separablen Pol. f (siehe 4.1.2). $\square$

4.1.10 Bsp. (i). $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$; L ist Zerfällungskörper des Pol. $(X^2-2)(X^2-3) \xrightarrow[4.1.2]{\sim} K \subset L$ galois; $[L:K] = \underbrace{[L:\mathbb{Q}(\sqrt{2})]}_{=2} \underbrace{[\mathbb{Q}(\sqrt{2}:\mathbb{Q})]}_{=2} = 4$

Bem. 4.1.4 $\leadsto \text{ord Gal}(L/K) = 4$. Genauer:

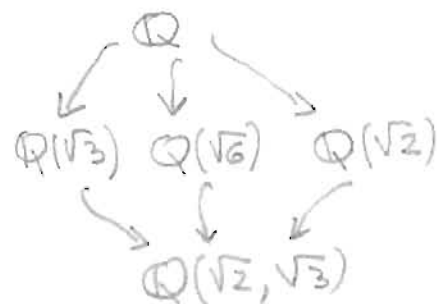
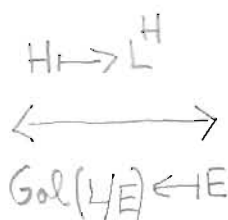
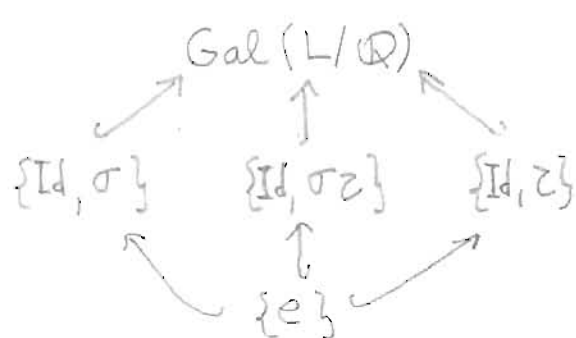
$G = \text{Gal}(L/K) = \{e, \sigma, \tau, \sigma\tau\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong V_4$ mit $\sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$, $\sigma(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$, $\tau(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, $\tau(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$; Tabelle:

	Id	σ	τ	$\sigma\tau$
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$

In der Tat $\underbrace{\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset L}_{\text{galois}} \xrightarrow[4.1.3]{\sim} \forall \varphi \in \text{Gal}(L/\mathbb{Q}): \varphi|_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})} \in \text{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$

also $\varphi(\sqrt{2}) \in \{\pm\sqrt{2}\}$, Analog $\varphi(\sqrt{3}) \in \{\pm\sqrt{3}\}$.

Galois-Korrespondenz:



Alle UG von G sind normal, da G abelsch $\leadsto$ alle Zwischenkörp. sind galois. Die zugeh. Galois-Gruppen sind jeweils $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(ii) $K = \mathbb{Q}$, $L =$ Zerfällungskörper von $X^3-2 = f$.

Nullstellen von f in $\mathbb{C}$: $\alpha_1 = \sqrt[3]{2}$, $\alpha_2 = \zeta \sqrt[3]{2}$, $\alpha_3 = \zeta^2 \sqrt[3]{2}$ mit $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

Also $L = \mathbb{Q}(\zeta, \sqrt[3]{2})$. Bsp. 4.1.5 $\leadsto \text{ord Gal}(L/\mathbb{Q}) = [L:\mathbb{Q}] = 6$.

Also $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong S_3$ oder $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Wir zeigen, es ist S_3 .

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\zeta)$ ist galois (Zerf. Körper von X^2+X+1) $\xrightarrow[4.1.3]{\sim} \forall \varphi \in \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$
 $\varphi(\zeta) \in \{\zeta, \bar{\zeta} = \zeta^2\}$

	Id	σ	τ	$\tau\sigma$	τ^2	$\tau^2\sigma$
$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$\zeta \sqrt[3]{2}$	$\zeta^2 \sqrt[3]{2}$	$\zeta^2 \sqrt[3]{2}$	$\zeta \sqrt[3]{2}$
ζ	ζ	ζ^2	ζ	ζ^2	ζ	ζ^2

$\sigma\tau = \tau^2\sigma \neq \tau\sigma$
 also $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ ist
 nicht abelsch $\leadsto$
 isomorph zu S_3