1. Vorlesung, 16.04.2009

1. Komplexe Zahlen und Funktionen

1.1. Der Körper der komplexen Zahlen.

Die komplexe Ebene und die Riemannsche Zahlenkugel bilden den Grundbereich der Funktionentheorie; dort sind ihre Objekte, die analytischen Funktionen, definiert und dort haben sie ihre Werte.

Auf $\mathbb{R}^2$ führen wir eine Addition und Multiplikation wie folgt ein:

$$\begin{aligned}(x,y)+(u,v) &:= (x+u, y+v)\\ (x,y)\cdot(u,v) &:= (xu-yv, xv+yu)\,.\end{aligned} \tag{1.1}$$

1.1.1. **Satz.** $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ *ist ein kommutativer Körper mit Nullelement* $(0,0)$ *und Einselement* $(1,0)$. *Dieser Körper heißt* ***Körper der komplexen Zahlen,*** *bezeichnet mit* $\mathbb{C} := (\mathbb{R}^2,+,\cdot)$.

Das Inverse von $z=(x,y)\neq 0$ ist

$$z^{-1} := \Big(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\Big)$$

Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(x) = (x,0)$ hat die Eigenschaften

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y) \quad , \quad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \quad , \quad \varphi(1) = (1,0)\ ,$$

d.h. φ ist ein Körper-Homomorphismus.

Die komplexen Zahlen $\{(x,0) : x\in\mathbb{R}\}$ bilden einen Körper mit der induzierten Addition und Multiplikation (1.1). Wir sagen, dass $\{(x,0) : x\in\mathbb{R}\}$ ein *Unterkörper* von $\mathbb{C}$ ist. Der Homomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \{(x,0) : x\in\mathbb{R}\}$ ist bijektiv, d.h. ein Isomorphismus. Wir *identifizieren* deshalb $\mathbb{R}$ mit $\{(x,0) : x\in\mathbb{R}\}$ und sagen, dass $\mathbb{R}$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ ist.

Wir schreiben für $(x,0)$ kurz x, also 0 für $(0,0)$, 1 für $(1,0)$, usw.

1.1.2. **Definition.** Die (nicht-reelle) Zahl $i=(0,1)$ heißt ***imaginäre Einheit*** . Es gilt

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (0^2-1^2, 0\cdot 1+1\cdot 0) = (-1,0) = -1.$$

Für $z=(x,y)$ schreiben wir nun

$$z = (x,0)+(0,y) = (x,0)+(0,1)\cdot(y,0) = x+iy.$$

Dann heißt x ***Realteil*** von z, und y heißt ***Imaginärteil*** von z, geschrieben $\operatorname{Re} z := x$, $\operatorname{Im} z := y$. Man beachte, dass der Imaginärteil y reell ist. Zahlen der Form iy mit $y\in\mathbb{R}$ heißen auch (rein) imaginär.

1.1.3. **Definition.** Die ***konjugierte Zahl*** zu $z=x+iy$ ist $\overline{z} := x-iy$.

1.1.4. **Satz** (Rechenregeln). *Für alle* $z,w\in\mathbb{C}$ *gilt:*

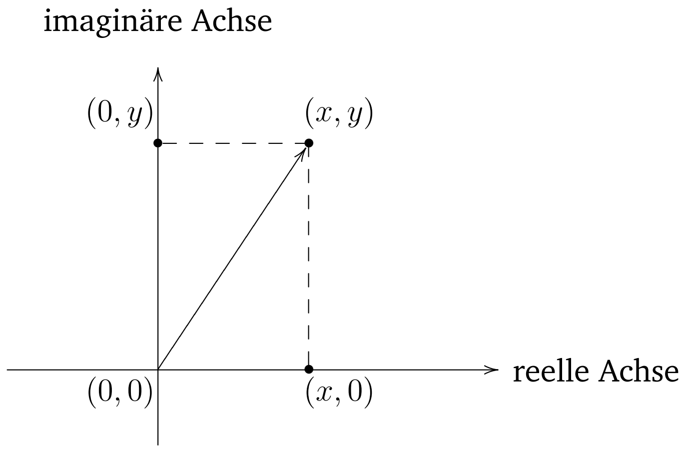
(i) $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}$, $\overline{z\cdot w} = \overline{z}\cdot\overline{w}$.
(ii) $z+\overline{z} = 2\operatorname{Re} z$, $z-\overline{z} = 2i\operatorname{Im} z$.
(iii) $z=\overline{z} \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$, $z=-\overline{z} \Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}$.
(iv) $z\cdot\overline{z} = x^2+y^2 \geqslant 0$ *für* $z=x+iy$.
(v) $\overline{\overline{z}} = z$.

1.1.5. **Definition.** Für $z\in\mathbb{C}$ heißt $|z| := \sqrt{z\cdot\overline{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$ der ***Betrag*** von z. Für $z\in\mathbb{R}$ ist $|z| = \sqrt{z^2}$ der übliche Betrag von reellen Zahlen.

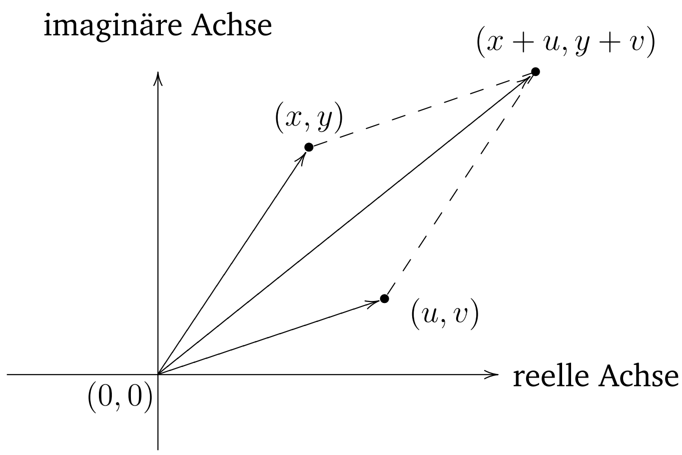
1.1.6. **Satz** (Rechenregeln für den Betrag). *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:*

(i) $|z| \geqslant 0$; $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
(ii) *Ist $z \neq 0$, so gilt $z^{-1} = \overline{z}/|z|^2$.*
(iii) $|\overline{z}| = |z|$.
(iv) $|\operatorname{Re} z| \leqslant |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leqslant |z|$.
(v) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.
(vi) $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ (***Dreiecksungleichung***).
Die Gleichheit gilt genau dann, wenn $z = 0$ (bzw. $w = 0$) oder $w/z \in \mathbb{R}_+$ (bzw. $z/w \in \mathbb{R}_+$).
(vii) $\big||z| - |w|\big| \leqslant |z - w|$ (***umgekehrte Dreiecksungleichung***).

1.1.7. **Geometrische Deutung der komplexen Zahlen.** Wir veranschaulichen uns seit Gauß die komplexen Zahlen geometrisch als Punkte in einer Ebene mit rechtwinkligen Koordinaten, genannt ***Gaußsche Zahlenbene*** (oder als Vektoren mit Ursprung im Nullpunkt $(0, 0)$ und Endpunkt in (x, y)).



Die Addition komplexer Zahlen ist dann die übliche Vektoraddition nach der Parallelogrammregel.



$|z|$ ist der Euklidische Abstand des Punktes $z = (x, y)$ zum Ursprung.
$\overline{z}$ ist die Spiegelung des Punktes $z = (x, y)$ an der reellen Achse.

1.1.8. **Topologie von $\mathbb{C}$.** Als bekannt vorausgesetzt werden die metrischen und topologischen Grundbegriffe (Metrik, Norm, Cauchy-Folge, offen, abgeschlossen, kompakt, zusammenhängend, Rand, innerer Punkt, Häufungspunkt usw.) sowie die Begriffe Grenzwert, Stetigkeit usw., die ausführlich in der Vorlesung Analysis I behandelt worden sind.

$(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ist ein normierter Raum. Auf $\mathbb{C}$ betrachten wir stets die von der Norm $|\cdot|$ induzierte Topologie. $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ist ein Banachraum, d.h. jede Cauchy-Folge bzgl. $|\cdot|$ konvergiert.

Ein topologischer Raum X heißt *kompakt*, wenn X die *Heine-Borel-Überdeckungseigenschaft* hat, d.h. wenn aus jeder offenen Überdeckung $(V_i)_{i\in I}$ von X endlich viele $i_1, \dots, i_k$ ausgewählt werden können so, dass schon $X = \bigcup_{r=1}^{k} V_{i_r}$. Die Familie $(V_{i_1}, \dots, V_{i_k})$ heißt Teilüberdeckung, und die Heine-Borel-Überdeckungseigenschaft kann auch so formuliert werden: Jede offene Überdeckung besitzt eine endliche Teilüberdeckung[1].

In $\mathbb{C}$ gelten die Sätze von Bolzano-Weierstrass und Heine-Borel.

1.1.9. **Satz** (Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{C}$). *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ besitzt einen Häufungswert.*

1.1.10. **Satz** (Heine-Borel). *Sei $K \subset \mathbb{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) K ist kompakt, d.h. jede offene Überdeckung von K besitzt eine endliche Teilüberdeckung.

(ii) K ist folgenkompakt, d.h. jede Folge in K hat eine in K konvergente Teilfolge.

(iii) K ist abgeschlossen und beschränkt.

Ein topologischer Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn es keine Zerlegung von X in zwei nichtleere disjunkte offene Teilmengen U, V gibt. X heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zu allen $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$ mit $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$ gibt. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt zusammenhängend (bzw. wegzusammenhängend), falls A versehen mit der Teilraumtopologie zusammenhängend (bzw. wegzusammenhängend) ist. Eine offene und zusammenhängende Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$ heißt ***Gebiet***.

1.1.11. **Satz.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Dann gilt: D ist ein Gebiet genau dann, wenn D wegzusammenhängend ist. Genauer: für jede $x, y \in D$ gibt es einen Streckenzug $[x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \ldots \cup [x_{k-1}, x_k] \subset D$ wobei $x_0 = x$ und $x_k = y$.*

1.1.12. **Definition** (Zusammenhangskomponente, Wegekomponente). Sei X ein topologischer Raum. Die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen A von X, die $x \in X$ enthalten, heißt ***Zusammenhangskomponente*** $X(x)$ von x. Wir sprechen auch kurz von ***Komponenten***. Die Vereinigung aller wegzusammenhängenden Teilmengen A von X, die $x \in X$ enthalten, heißt ***Wegekomponente*** von x. Ein Raum X heißt ***lokal (weg-) zusammenhängend***, wenn zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung U von x eine (weg-) zusammenhängendende Umgebung $V \subset U$ existiert.

1.1.13. **Bemerkung.**

(1) Die Zusammenhangskomponenten von X sind zusammenhängende abgeschlossene Teilmengen von X.

[1] „Teil“ heißt nicht, dass nur ein Teil von X überdeckt wird, sondern dass man nur eine Teilmenge der Indizes benutzt.

(2) Ist $y \in X(x)$, so gilt $X(x) = X(y)$. Eine Komponente ist eine maximale zusammenhängende Teilmenge von X. Ein Raum ist disjunkte Vereinigung seiner Komponenten.

(3) Ein Punkt y ist in der Wegekomponente von x, genau dann, wenn x und y durch eine stetige Kurve in X verbindbar sind. Eine Wegekomponente ist eine maximale wegzusammenhängende Teilmenge von X. Ein Raum ist disjunkte Vereinigung seiner Wegekomponenten.

(4) Die offenen Mengen von $\mathbb{C}$ sind lokal wegzusammenhängend (nach Satz 1.1.11 auch lokal zusammenhängend).

1.1.14. **Satz.**

(i) Die Komponenten eines lokal zusammenhängenden Raumes sind offen.

(ii) Die Wegekomponenten eines lokal wegzusammenhängenden Raumes sind offen und stimmen mit den Komponenten überein.

(iii) Die Aussage (ii) trifft insbesondere für offene Mengen in $\mathbb{C}$. Eine solche Menge hat höchstens abzählbar viele Komponenten ($=$ Wegwkomponenten) und diese sind offen.