2. Vorlesung, 20.04.2009

1.2. Riemannsche Sphäre.

Wir ergänzen $\mathbb{C}$ durch ein (ideales) Element $\infty \notin \mathbb{C}$ und setzten $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. $\overline{\mathbb{C}}$ heißt die ***erweiterte Zahlenebene***.

Wir führen eine Topologie auf $\overline{\mathbb{C}}$ ein: $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ heißt offen genau dann, wenn $U \cap \mathbb{C}$ offen ist und falls $\infty \in U$, gibt es $M > 0$ mit $\{z \in \mathbb{C} : |z| > M\} \subset U$. Eine Menge $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ mit $\infty \in U$ ist offen genau dann, wenn $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$ kompakt in $\mathbb{C}$ ist. Für eine Folge (z_n) in $\overline{\mathbb{C}}$ gilt $z_n \to \infty$, $n \to \infty$, genau dann, wenn $|z_n| \to \infty$, $n \to \infty$.

Setze $S^2 = \{(w,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3 : |w|^2 + t^2 = 1\}$. Mit Hilfe der stereographischen Projektion definiere

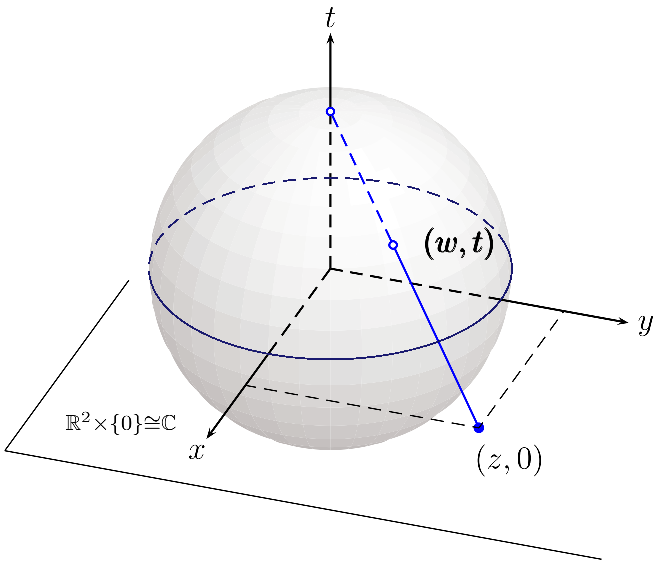
$$\sigma : S^2 \to \overline{\mathbb{C}}, \quad \sigma(w,t) = \begin{cases} \dfrac{w}{1-t}\,, & (w,t) \neq (0,1) \\ \infty\,, & (w,t) = (0,1) =: N \end{cases}$$

(Man setzt die stereographische Projektion fort zu einer Bijektion von S^2 auf $\overline{\mathbb{C}}$ durch $\sigma(N) = \infty$.) Die Umkehrung ist gegeben durch

$$\sigma^{-1} : \overline{\mathbb{C}} \to S^2,, \quad \sigma^{-1}(z) = \begin{cases} \left(\dfrac{2z}{1+|z|^2}, \dfrac{|z|^2-1}{1+|z|^2}\right), & z \neq \infty \\ N\,, & z = \infty \end{cases}$$

1.2.1. **Satz.** *σ ist ein Homöomorphismus.*

Deshalb betrachten wir S^2 als ein Modell für $\overline{\mathbb{C}}$ und nennen $\overline{\mathbb{C}}$ auch ***Riemannsche Sphäre***.



Erweiterung der algebraischen Operationen:

$$\begin{aligned} & a \cdot \infty = \frac{a}{0} = \infty\,, \quad \text{für } a \neq 0 \\ & a \pm \infty = \infty\,, \quad \frac{a}{\infty} = 0\,, \quad \text{für } a \neq \infty \qquad (1.2) \\ & \infty + \infty = \infty \end{aligned}$$

Nicht definiert sind $0 \cdot \infty$, $\dfrac{0}{0}$, $\infty - \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$.

1.3. **Potenzreihen, Exponentialfunktion, Logarithmus.**

1.3.1. **Definition.** Eine Funktionenreihe $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$ heißt ***Potenzreihe*** mit Koeffizienten a_n und Entwicklungspunkt z_0. Der ***Konvergenzradius*** der Reihe ist

$$R := \sup\Big\{r \in [0,\infty) : \sum_{n\geqslant 0} a_n r^n \text{ konvergent}\Big\} \in [0,\infty].$$

Wir verabreden, dass $B_R(z_0) := \mathbb{C}$, falls $R = \infty$.

1.3.2. **Satz.**
(a) *Die Reihe ist in der Kreisscheibe $B_R(z_0)$ absolut konvergent.*
(b) *Die Reihe ist in jeder Kreisscheibe $B_\rho(z_0)$ mit $\rho < R$ normal (also auch gleichmäßig) konvergent.*
(c) *Die Reihe ist für $|z| > R$ divergent.*

$B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ heißt ***Konvergenzbereich*** der Potenzreihe. Die Potenzreihe definiert eine Funktion $P : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$, $P(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz in allen $B_\rho(z_0)$ mit $\rho < R$ ist P stetig.

1.3.3. **Satz.** *Sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$. Dann gilt:*

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}\,, \qquad \text{(Cauchy-Hadamard–Formel)} \tag{1.3}$$

und

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{1.4}$$

falls der Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$ existiert.

1.3.4. **Definition.** Die ***Exponentialreihe*** ist die Potenzreihe

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}\,.$$

Der Konvergenzradius ist nach (1.4) $R = \infty$, da $a_n = 1/n!$ und $|a_n/a_{n+1}| = n+1$. Die Exponentialreihe definiert also eine Funktion

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad \exp(z) := \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!} \in \mathbb{C}\,, \tag{1.5}$$

genannt ***Exponentialfunktion***.

Es gilt

$$\exp(1) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} = e \qquad \text{(Eulersche Zahl)}.$$

Mit Hilfe des Satzes vom Cauchy-Produkt (Analysis I, 3.3.5, siehe auch Blatt 7, Aufgabe 2) erhalten wir die ***Funktionalgleichung*** (***Additionstheorem***) ***der Exponentialfunktion***:

$$\boxed{\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)\,, \quad z,w \in \mathbb{C}\,.} \tag{1.6}$$

Aufgabe. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned}
&\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})\,, \quad z \in \mathbb{C}\\
&\exp(z) \in \mathbb{R}\,, \quad z \in \mathbb{R}\\
&|\exp(z)| = 1\,, \quad z \in i\mathbb{R}\\
&|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.
\end{aligned}$$

Wegen $\exp(0) = 1$, folgt aus (1.6), dass

$$\exp(-z) = \exp(z)^{-1} = \frac{1}{\exp(z)}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{1.7}$$

Aus (1.6), (1.7) ergibt sich leicht, dass $\exp(r) = e^r$ für alle $r \in \mathbb{Q}$. Die Exponentialfunktion stimmt für rationale Zahlen mit Potenzen von e überein. Dies motiviert die folgende Definition.

1.3.5. **Definition.** Für $z \in \mathbb{C}$ sind die komplexen Potenzen von e definiert als

$$\boxed{e^z := \exp(z)}\,.$$

Damit wird die Funktionalgleichung zur ***Potenzregel***:

$$e^{z+w} = e^z\, e^w\,, \quad z, w \in \mathbb{C}\,. \tag{1.8}$$

Wir verwenden beide Schreibweisen, e^z und $\exp(z)$.

Die trigonometrischen Funktionen wurden in der Vorlesung Analysis I ausführlich untersucht. Sie sind Abkömmlinge der Exponentialfunktion, die Mutter vieler interessanter Funktionen. Ihre Eigenschaften setzen wir als bekannt voraus.

1.3.6. **Definition** (Euler). Sei $z \in \mathbb{C}$. Definiere

$$\begin{aligned}
\sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})\,, \quad & \cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})\,,\\
\sinh z &= \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z})\,, \quad & \cosh z &= \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z})\,.
\end{aligned}$$

Es folgt (durch Einsetzen der Potenzreihen-Darstellung von e^{iz} und e^{-iz})

$$\begin{aligned}
\sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1} \quad & \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, z^{2n}\\
\sinh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\, z^{2n+1} \quad & \cosh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\, z^{2n}
\end{aligned}$$

Alle diese Reihen haben Konvergenzradius ∞, da die Exponentialreihe Konvergenzradius ∞ hat.
Die Definition impliziert sofort

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z\,.$$

Dies ist i.A. nicht die Zerlegung in Real- und Imaginärteil von e^{iz}. Wenn aber $\varphi \in \mathbb{R}$, so gilt $\cos\varphi, \sin\varphi \in \mathbb{R}$ und wir erhalten die ***Eulersche Formel***:

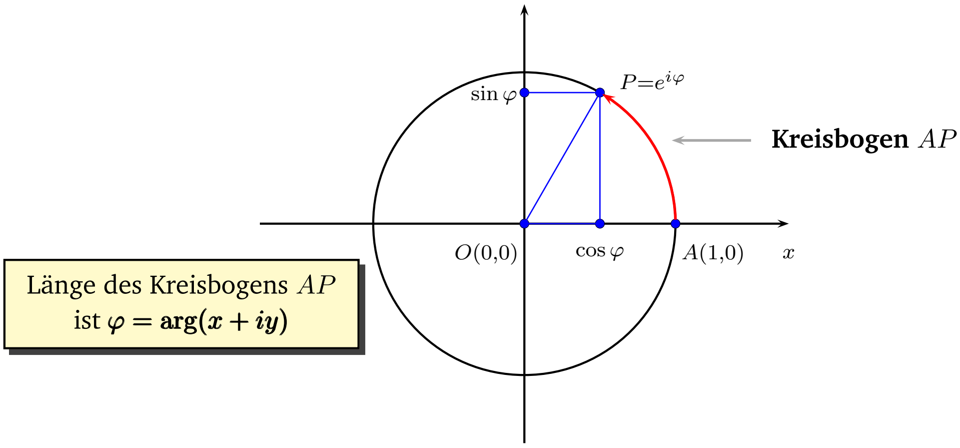
$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi\,, \qquad \text{wobei } \cos\varphi = \operatorname{Re} e^{i\varphi},\ \sin\varphi = \operatorname{Im} e^{i\varphi}.} \tag{1.9}$$

Die Eulersche Formel ist eine der wichtigsten und schönsten der Mathematik. Sie scheint hier ein bisschen vom Himmel gefallen und ist eine leichte Folgerung der Definitionen. Um sie besser einzuschätzen, geben wir die geometrischen Definitionen von Sinus und Cosinus.

1.3.7. **Definition.** Sei $\varphi \in [0, 2\pi)$. Definiere $(\cos_{geom} \varphi, \sin_{geom} \varphi)$ als die Koordinaten des Punktes P aus dem Einheitskreis, so dass die Bogenlänge des Kreisbogens AP (gemessen gegen den Uhrzeigersinn) gleich φ ist. Dann setze die Funktionen $\cos$ und $\sin$ auf $\mathbb{R}$ fort, als periodische Funktionen mit der Periode 2π.

Diese Definition entspricht auch der Definition von Cosinus und Sinus als Ankathete/Hypothenuse und Gegenkathete/Hypothenuse in einem rechtwinkligen Dreieck.

1.3.8. **Satz.** *Die Bogenlänge des Kreisbogens AP mit $P = e^{i\varphi}$ ist φ. Daher stimmen die geometrischen und analytischen (Eulerschen) Definitionen von $\cos$ und $\sin$ überein.*



Beweis : Im nächsten Satz sehen wir, dass der Kreisbogen AP durch $\gamma : [0, \varphi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = \cos t + i \sin t$ parametrisiert werden kann. Dessen Bogenlänge ist

$$\int_0^{\varphi} |\gamma'(t)|\, dt = \varphi\,.$$

$\square$

So betrachtet bildet die Eulersche Formel eine Brücke zwischen den beiden Definitionen. Sie zeigt zum Beispiel, dass die geometrisch definierten trigonometrischen Funktionen analytisch sind.