3. Vorlesung, 23.04.2009

1.3.9. **Satz** (Parametrisierung der Kreislinie).
(i) *Die Abbildung* $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $p(\varphi) = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ *ist ein Gruppenmorphismus der additiven Gruppe* $(\mathbb{R}, +)$ *auf die multiplikative Gruppe* $(S^1, \cdot\,)$ *mit dem Kern* $2\pi\mathbb{Z}$. *Es gilt* $e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2}$ *genau dann, wenn* $\varphi_1 - \varphi_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$.
(ii) *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein halboffenes Intervall der Länge* 2π. *Dann ist* $p|_I : I \longrightarrow S^1$ *bijektiv und stetig. Ist* $a \in I$ *ein Endpunkt von* I, *so ist die Umkehrung* $(p|_I)^{-1}$ *stetig auf* $S^1 \setminus \{p(a)\}$ *und unstetig in* $p(a)$.

1.3.10. **Definition.**
(a) Die Funktion $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $p(\varphi) = e^{i\varphi}$ heißt die ***Standardparametrisierung des Einheitskreises*** S^1.
(b) Für $z \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ heißt $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $e^{i\varphi} = z/|z|$ ein ***Argument*** oder ein ***Wert des Arguments*** von z. Setze

$$\operatorname{Arg} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\,, \quad \operatorname{Arg}(z) := \big\{\varphi \in \mathbb{R} : e^{i\varphi} = z/|z|\big\}\,.$$

$\operatorname{Arg}(z)$ heißt die ***Menge der Argumente*** von z. Die einzige Zahl $\arg(z)$ mit der Eigenschaft, dass

$$\operatorname{Arg}(z) \cap (-\pi, \pi] = \{\arg(z)\}$$

heißt ***das Argument*** oder ***Hauptwert des Arguments*** von z. Der Zahl $z = 0$ wird kein Argument zugeordnet.
(c) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein halboffenes Intervall der Länge 2π. Die Abbildung $\mathbb{C}^* \to I$, $z \mapsto (p|_I)^{-1}(z/|z|)$ heißt ein ***Zweig des Arguments***. Die Abbildung $\arg : \mathbb{C}^* \longrightarrow (-\pi, \pi]$, $z \mapsto \arg(z)$ heißt ***Hauptzweig des Arguments***.

Der Hauptzweig des Arguments ist so gewählt, dass $\operatorname{Im}\log(z) = \arg(z)$, wobei $\log$ der Hauptzweig des Logarithmus ist. Eine konkrete Formel für $\arg$ ist gegeben durch

$$\arg : \mathbb{C}^* \longrightarrow (-\pi, \pi]\,,\ \arg z = \begin{cases} \arccos\left(\dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}\right) \,, \operatorname{Im} z \geqslant 0\,, \\[2ex] -\arccos\left(\dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}\right) \,, \operatorname{Im} z \leqslant 0\,, z \notin \mathbb{R}_-. \end{cases}$$

Dabei ist $\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ die negative reelle Achse. Sei $\mathbb{C}_- := \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-$ die entlang der negativen reellen Achse geschlitzte Ebene. Dann ist $\arg$ stetig auf $\mathbb{C}_-$ und unstetig in allen Punkten von $\mathbb{R}_-$. Dort macht $\arg$ einen Sprung von 2π:

$$\lim_{\substack{z\to a\\ \operatorname{Im} z>0}} \arg(z) = \arg(a) = \pi\,, \qquad \lim_{\substack{z\to a\\ \operatorname{Im} z<0}} \arg(z) = -\pi$$

1.3.11. **Satz.** *Jedes* $z \in \mathbb{C}^*$ *hat die Form*

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad \textit{mit } r = |z| \textit{ und } \varphi \in \operatorname{Arg}(z)\,. \tag{1.10}$$

$P : \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$, $(r, \varphi) \mapsto re^{i\varphi}$ *ist bijektiv und stetig. Die Umkehrabbildung* $\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi]$, $z \mapsto (|z|, \arg(z))$ *ist stetig auf* $\mathbb{C}_-$ *und unstetig in allen Punkten der negativen reellen Achse* $\mathbb{R}_-$.

Die Form (1.10) heißt Polarkoordinatendarstellung von z und (r, φ) heißen die ***Polarkoordinaten*** von z. Die Abbildung P heißt ***Polarkoordinatenabbildung***.

Wir haben nun für $z \in \mathbb{C}^*$ zwei Koordinatensysteme: die kartesichen Koordinaten $(x, y) = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ und die Polarkoordinaten $(r, \varphi) = (|z|, \arg(z))$. Für viele Probleme ist es vorteilhaft, die Polarkoordinaten zu benutzen.

Zum Beispiel ist die Multiplikation zweier in Polarkoordinaten $z = |z|e^{i\varphi}$, $w = |z|e^{i\psi}$ gegebener Zahlen besonders einfach: Es ist $zw = |z||w|e^{i(\varphi+\psi)}$. Die Multiplikationsregel für komplexe Zahlen lautet also: „Die Längen werden multipliziert, die Argumente werden addiert“. Daraus folgt die ***Moivresche Formel***:

$$\boxed{\big[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.}$$

Eine komplexe Zahl z heißt ***n-te Einheitswurzel*** ($n \in \mathbb{N}$), falls $z^n = 1$ gilt.

1.3.12. **Satz.** *Es gibt zu jedem $n \in \mathbb{N}$ genau n verschiedene n-te Einheitswurzeln, nämlich*

$$\zeta_\nu = e^{\frac{2\pi\nu}{n}} = \cos\frac{2\pi\nu}{n} + i\sin\frac{2\pi\nu}{n}\,, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant n-1\,.$$

Sie liegen regelmäßig verteilt auf der Einheitskreislinie $|z| = 1$ im Winkelabstand $2\pi/n$.

1.3.13. **Satz.** *Die Exponentialabbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ ist eine surjektive und periodische Abbildung mit Periode $2\pi i$. Für $z \in \mathbb{C}^*$ gilt $\exp^{-1}(z) = \log|z| + i\operatorname{Arg}(z) =: \operatorname{Log}(z)$. Die Einschränkung $\exp : \{z : -\pi < \operatorname{Im} z \leqslant \pi\} \to \mathbb{C}^*$ ist stetig und bijektiv. Deren Umkehrung, gegeben durch*

$$\log : \mathbb{C}^* \to \{z : -\pi < \operatorname{Im} z \leqslant \pi\}\,, \quad z \mapsto \log|z| + i\arg z\,,$$

ist stetig auf $\mathbb{C}_-$ und unstetig auf $\mathbb{R}_-$. Für alle reellen Zahlen $a \in \mathbb{R}_-$ gilt

$$\lim_{\substack{z\to a\\ \operatorname{Im} z>0}} \log(z) = \log(a) = \log|a| + i\pi\,, \qquad \lim_{\substack{z\to a\\ \operatorname{Im} z<0}} \log(z) = \log|a| - i\pi\,,$$

d.h. $\log$ macht beim Überqueren der negativen reellen Achse einen „Sprung von $2\pi i$“.

1.3.14. **Definition.**

(a) Sei $z \in \mathbb{C}^*$. Eine Zahl $w \in \exp^{-1}(z)$ (d.h. eine Zahl, die die Gleichung $e^w = z$ erfüllt) heißt ***ein Logarithmus*** (oder ***Wert des Logarithmus***) von z. Die Zahl $\log(w)$ ist ein Logarithmus von z und heißt ***Hauptwert des Logarithmus*** von z.

(b) Eine stetige Funktion $l : G \to \mathbb{C}$ in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}^*$ heißt ***Logarithmusfunktion*** oder ***Zweig des Logarithmus*** in G, wenn gilt $e^{l(z)} = z$ für alle $z \in G$, d.h. wenn l eine stetige Umkehrung von $\exp$ ist. Die soeben eingeführte lokale Umkehrung

$$\log : \mathbb{C}_- \to \{z : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$$

ist stetig und heißt ***Hauptzweig des Logarithmus***. Sie ist eine komplexe Fortsetzung des gewöhnlichen reellen (natürlichen) Logarithmus $\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

1.3.15. **Bemerkung.** Aus Sicht der reellen Analysis ist die Abbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ ein lokaler $\mathscr{C}^\infty$ Diffeomeorphismus und sogar eine Überlagerung. Die Abbildung $\log : \mathbb{C}_- \to \{z : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ ist eine $\mathscr{C}^\infty$ lokale Umkehrung von $\exp$.

2. Holomorphe Funktionen

2.1. Definition und erste Eigenschaften.

2.1.1. **Definition.** Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt ***komplex differenzierbar*** in $z_0 \in D$, wenn

$$f'(z_0) := \frac{df}{dz}(z_0) := \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{in } \mathbb{C} \text{ existiert.} \tag{2.1}$$

Diese Zahl heißt dann die (komplexe) ***Ableitung*** von f in z_0. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt ***holomorph*** in D, falls f komplex differenzierbar in allen Punkten $z \in D$ ist; f heißt ***holomorph in*** $z_0 \in D$, wenn f holomorph in einer offenen Umgebung von z_0 ist.

Diese Definition erhalten wir durch Übertragung der Definition der Differenzierbarkeit in einer reellen Veränderlichen. Auf gleiche Weise wie in der reellen Analysis zeigt man:

2.1.2. **Lemma.** *Folgende Bedingungen sind äquivalent:*
(i) f *ist komplex differenzierbar in* z_0
(ii) Es gibt $\lambda \in \mathbb{C}$ *und* $\rho : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *mit* $\lim_{z \to z_0} \frac{\rho(z)}{z - z_0} = 0$ *und* $f(z) = f(z_0) + \lambda(z - z_0) + \rho(z)$
(iii) Es gibt $L : \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ *mit* $f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + o(|z - z_0|)$.
In diesem Falle gilt $f'(z_0) = \lambda$ *und* $L(v) = f'(z_0) \cdot v$ *für* $v \in \mathbb{C}$.

Dabei bezeichnet $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ den Raum der $\mathbb{C}$–linearen Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$.

Sei nun $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $z = x + iy \mapsto f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, wobei $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$. Wir identifizieren f mit einer Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto ((x, y), v(x, y))$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \supset D \arrow[r, "z \longmapsto f(z)"] \arrow[d, "z \mapsto (x,y)"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "z \mapsto (x,y)"] \\
\mathbb{R}^2 \supset D \arrow[r, "(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))"'] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

Die Funktion f heißt reell-differenzierbar, wenn $L \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) = \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ existiert mit $f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + o(|z - z_0|)$, $z \to z_0$. Die Abbildung L ist das Differential von f in z_0 und wird bezeichnet mit $L = df(z_0)$. Ist f reell-differenzierbar in z_0, so existieren die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(z_0)\,,$$

und

$$df(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\, dy\,.$$

Dabei sind

$$dx\,, dy : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \qquad dx(z) = dx(x + iy) = x\,, \quad dy(z) = dy(x + iy) = y\,.$$

Wir benutzen oft die komplexen Differentiale

$$dz\,, d\overline{z} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \qquad dz(z) = z\,, \quad d\overline{z}(z) = \overline{z}\,.$$

also

$$dz = dx + idy\,,$$
$$d\overline{z} = dx - idy\,.$$

2.1.3. **Satz.** *Sei* $D \subset \mathbb{C}$ *offen,* $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *und* $z_0 \in D$. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) f *ist komplex-differenzierbar in* z_0,
(ii) f *ist reell-differenzierbar in* z_0 *und* $df(z_0)$ *ist* $\mathbb{C}$*-linear,*

*(iii) f ist reell-differenzierbar in z_0 und erfüllt zusätzlich die **Cauchy-Riemann-Gleichungen**:*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0} \tag{2.2}$$

d.h.

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}} \tag{2.3}$$

In diesem Falle gilt

$$\boxed{df(z_0)(v) = f'(z_0)\cdot v\,, \quad \textit{für } v \in \mathbb{C}.} \tag{2.4}$$

Beweis : (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) ist klar, da $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \subset \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.
Zu (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii): $df(z_0) \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \Longleftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{C}$ mit $df(z_0)(z) = \lambda\cdot z \Longleftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$df(z_0)\cdot 1 = \lambda\,, \quad df(z_0)\cdot i = i\lambda\,.$$

d.h. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "z\mapsto\lambda\cdot z"] \arrow[d, "z\mapsto(x,y)"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "z\mapsto(x,y)"] \\
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "df(z_0)"'] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

Wir wissen aus Analysis II, dass $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = df(z_0)\cdot e_1$ und $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = df(z_0)\cdot e_2$, wobei $e_1 = (1,0)$ und $e_2 = (0,1)$. Durch den Isomorphismus $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, $(x,y)\mapsto x+iy$ werden e_1 und e_2 auf 1 und i abgebildet. Es folgt

$$df(z_0)\cdot 1 = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\,, \quad df(z_0)\cdot i = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\,.$$

Also $df(z_0) \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \Longleftrightarrow$ (2.2). Wenn wir Realteil und Imaginärteil von (2.2) betrachten, erhalten wir (2.3).

□

Führen wir die folgenden partiellen differentiellen Operatoren ein:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\,, \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\Big) \tag{2.5}$$

Die Cauchy-Riemannschen Gleichungen (2.2) werden

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0}\,. \tag{2.6}$$

Ist f komplex-diferrenzierbar, so gilt nach (2.2), (2.5)

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = df(z_0)\cdot 1 = f'(z_0). \tag{2.7}$$

Wenn wir z und $\overline{z}$ als Variablen betrachten und eine Funktion

$$f(x,y) = f\Big(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\Big)$$

nach z und $\overline{z}$ mittels Kettenregel ableiten, erhalten wir die Formel (2.5). Dies bedeutet, dass wir $\dfrac{\partial f}{\partial z}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ durch formelles Differenzieren nach den Variablen z und $\overline{z}$ erhalten.

Dies erleichtert viele Rechnungen. Z.B.

$$\frac{\partial}{\partial z} z^n = n z^{n-1}, \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} z^n = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial z} |z|^2 = \frac{\partial}{\partial z} (z\overline{z}) = \overline{z}.$$