4. VORLESUNG, 27.04.2009

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ reell-diffbar in $z_0 \in D$. Das Differential von f in z_0 ist

$$df(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)dy \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$$

wobei $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum der $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ ist. $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ ist 2-dimensional mit Basis $\{dx, dy\}$.

Betrachte die folgenden Unterräume:

$$\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) := \{\ell : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \ \ell \ \mathbb{C}\text{–linear}\}$$
$$\mathscr{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) := \{\ell : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \ \ell \ \mathbb{C}\text{–antilinear}\}$$

(ℓ $\mathbb{C}$–antilinear $:\Longleftrightarrow$ ℓ $\mathbb{R}$–linear und $\ell(\lambda z) = \overline{\lambda}\ell(z)$ für $\lambda, z \in \mathbb{C}$)

Eine Basis in $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ ist $\{dz\}, dz = dx + idy$, und eine Basis in $\mathscr{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ ist $\{d\overline{z}\}, d\overline{z} = dx - idy$. Es gilt

$$\mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \oplus \mathscr{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \ .$$

Zu $\ell \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, $\ell = a\,dx + b\,dy$, gibt es eine eindeutig bestimmte Zerlegung
$\ell = \ell_1 + \ell_2$ mit $\ell_1 \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, $\ell_2 \in \mathscr{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$:
Wegen

$$dx = \frac{dz + d\overline{z}}{2} \quad , \quad dy = \frac{dz - d\overline{z}}{2i}$$

$$\begin{aligned} \ell = adx + bdy &= a\frac{dz + d\overline{z}}{2} + b\frac{dz + d\overline{z}}{2i} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}(a - ib)dz}_{=:\ell_1} + \underbrace{\frac{1}{2}(a + ib)d\overline{z}}_{=:\ell_2} \end{aligned}$$

für $\ell = df(z_0), a = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0), b = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ folgt

$$\boxed{df(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)d\overline{z}.}$$

(Zerlegung in $\mathbb{C}$–lineare und $\overline{\mathbb{C}}$–antilineare Komponenten von $df(z_0)$)
Wir erhalten erneut:

$$\begin{aligned} f \text{ ist } \mathbb{C}\text{-differenzierbar in } z_0 &\Longleftrightarrow f \text{ ist } \mathbb{R}\text{-differenzierbar in } z_0 \ \& \ df(z_0) \text{ ist } \mathbb{C}\text{–linear} \\ &\Longleftrightarrow f \text{ ist } \mathbb{R}\text{-differenzierbar in } z_0 \ \& \text{ die } \mathbb{C}\text{–antilineare} \\ &\qquad \text{Komponente von } df(z_0) \text{ verschwindet} \\ &\Longleftrightarrow f \text{ ist } \mathbb{R}\text{-differenzierbar in } z_0 \text{ und } \boxed{\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = 0} \end{aligned}$$

(**Cauchy-Riemannsche-Gleichungen**)

Einige leichte Folgerungen aus Def. 2.1.1:

2.1.4. **Folgerung.** *Ist f komplex-differenzierbar in z_0, so ist f stetig in z_0.*

2.1.5. **Folgerung.** *Ist D ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f'(z) = 0$, für alle $z \in D$, so ist f konstant.*

Beweis: f holomorph $\Rightarrow$ f reell-differenzierbar und $df(z) = f'(z)dz = 0$, für alle $z \in D$. Nach dem Konstanzkriterium (Skript 9.4.2; Königsberger 2, Kap. 2, §2.2.) ist f konstant. $\square$

Zusatz. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:*

(i) f lokal-konstant (d.h. konstant in jeder Zusammenhangskomponente),
(ii) f holomorph und $f'(z) = 0$ für alle $z \in D$.

Auf völlig gleiche Weise wie im Reellen beweist man den folgenden Satz.

2.1.6. **Satz** (Rechenregeln für die Ableitung). *Seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ komplex-differenzierbar in $z_0 \in D$. Dann sind $f + g$, λf $(\lambda \in \mathbb{C})$, fg und falls $f'(z_0) \neq 0$ auch $1/f$ in z_0 komplex-differenzierbar und es gilt:*

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0) \quad , \quad (\lambda f)'(z_0) = \lambda f'(z_0)$$

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f^2(z_0)}$$

2.1.7. **Beispiel.**
(i) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$ $(n \in \mathbb{N})$ ist holomorph, $(z^n)' = nz^{n-1}$, $z \in \mathbb{C}$.
(ii) Polynome $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$, sind holomorph, und $P'(z) = na_n z^{n-1} + \ldots + a_1$, $z \in \mathbb{C}$.
(iii) Eine rationale Funktion ist definiert als Quotient zweier Polynome
$P, Q \in \mathbb{C}[z]$, $Q \not\equiv 0$: $\quad R : \mathbb{C} \setminus \{z : Q(z) = 0\} \to \mathbb{C}$, $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$,
R ist holomorph auf seinen Definitionsbereich.
(iv) Sei $\sum\limits_{n \geq 0} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$.

Sei $P : B_R(0) \to \mathbb{C}, P(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Dann ist P holomorph und es gilt

$$P'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n z^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \ , \quad \text{d.h.}$$

eine Potenzreihe darf im Kovergenzbereich gliedweise differenziert werden.

Beweis: Sei $z_0 \in B_R(0)$. Wähle $\rho < R$ mit $z_0 \in B_\rho(0)$. Wir stellen fest:

- Die Funktionenreihe $\sum\limits_{n \geq 0} a_n z^n$ konvergiert in $B_\rho(0)$.
- Die Reihe der Differentiale

$$\sum_{n \geq 0} d(a_n z^n) = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1} dz = \Big(\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}\Big) dz$$

konvergiert gleichmäßig in $B_\rho(0)$, da $\sum\limits_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ Konvergenradius R hat.

Daraus folgt, dass P reell-differenzierbar in $B_\rho(0)$ ist, also auch in z_0 und

$$dP(z_0) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}\Big) dz \ .$$

$dP(z_0)$ ist deshalb $\mathbb{C}$–linear, P ist komplex-differenzierbar und $P'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$.

$\square$

(v) Nach (iv) sind $\exp, \cos, \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\exp'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \exp(z)$$

$$\cos'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin(z)$$

und analog

$$\sin'(z) = \cos(z)$$

2.1.8. **Satz** (Kettenregel)**.** *Seien $D, G \subset \mathbb{C}$ offen. Sei $f : D \to G$ komplex-differenzierbar in $z_0 \in D$, g komplex-differenzierbar in $z_0 \in D$, g komplex-differenzierbar in $w_0 = f(z_0) \in G$. Dann ist $g \circ f$ komplex-differenzierbar in z_0 und gilt*

$$\boxed{(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)}\ .$$

Insbesondere ist $g \circ f$ holomorph, wenn f und g holomorph sind.

Beweis: $g \circ f$ ist reell-differenzierbar und $d(g \circ f)(z_0) = dg(w_0) \circ df(z_0)$ (Kettenregel für Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, siehe Skript 9.1.8 oder Königsberger 2, Kap. 2, §3.1).
Nun sind $dg(w_0)$ und $df(z_0)$ $\mathbb{C}$–linear, also auch $d(g \circ f)(z_0) \Rightarrow g \circ f$ komplex-differenzierbar. Außerdem ist $df(z_0)$ die Multiplikation mit $f'(z_0)$, $dg(w_0)$ die Multiplikation mit $g'(w_0)$, also $dg(w_0) \circ df(z_0)$ die Multiplikation mit $g'(w_0) \cdot f'(z_0)$, d.h. $d(g \circ f)(z_0) = dg(w_0) \circ df(z_0) = g'(w_0) \cdot f'(z_0)\, dz$. Aber $d(g \circ f)(z_0) = (g \circ f)'(z_0)\, dz$.
Es folgt $(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0) \cdot f'(z_0)$. $\square$

2.1.9. **Satz.** *Seien $D, G \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to G$, so dass*

(i) *f holomorph,*
(ii) *f Homöomorphismus, und*
(iii) *$f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$.*

Dann ist auch f^{-1} holomorph und $\boxed{(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}}$ *für alle $w \in G$.*

Beweis: Sei $w \in G$ fest, $z_0 := f^{-1}(w_0)$. Sei (w_n) eine Folge in G, $w_n \to w_0$, $n \to \infty$ und $w_n \neq w_0$. Dann gilt $z_n := f^{-1}(w_n) \to f^{-1}(w_0) =: z_0$ und $z_n \neq z_0$. Deshalb

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(w_n) - f^{-1}(w_0)}{w_n - w_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{z_n - z_0}{f(z_n) - f(z_0)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{f(z_n)-f(z_0)}{z-z_0}} = \frac{1}{f'(z_0)}\ .$$

Die Folge (w_n) ist beliebig $\Rightarrow$ Behauptung. $\square$

2.1.10. **Beispiel.** Sei $\ell : D \to \mathbb{C}$ eine Logarithmusfunktion. Dann ist ℓ holomorph und es gilt

$$\ell'(z) = \frac{1}{z} \text{ für alle } z \in D\ .$$