5. VORLESUNG, 30.04.2009

2.1.11. **Definition.** Eine Abbildung $f : D \to \widetilde{D}$ zwischen zwei offenen Mengen heißt ***biholomorph***, falls f bijektiv ist und f, f^{-1} holomorph sind. Zwei offene Teilmengen $D, \widetilde{D} \subset \mathbb{C}$ heißen biholomorph, falls eine biholomorphe Abbildung $f : D \to \widetilde{D}$ existiert.

Der ***Riemannsche Abbildungssatz*** besagt:
Jede einfach-zusammenhängende offene Menge $D \subset \mathbb{C}$ mit $D \neq \mathbb{C}$ ist biholomorph zur Einheitskreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

2.1.12. **Satz** (Umkehrsatz). *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in D$ mit $f'(z_0) \neq 0$. Dann gibt es offene Umgebungen $U \subset D$ von z_0 und $V \subset \mathbb{C}$ von $f(z_0)$, so dass $f|_U : U \to V$ biholomorph ist.*

Beweis : Wir wissen, dass f reell-differenzierbar ist [2]. Nun gilt $df(z_0) = f'(z_0)\, dz$ mit $f'(z_0) \neq 0$. Deshalb ist $df(z_0) \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ein Isomorphismus. Reeller Umkehrsatz $\Rightarrow \exists\, U, V$ wie oben mit $f|_U : U \to V$ ein $\mathscr{C}^\infty$-Diffeomorphismus. Satz 2.1.9 $\Rightarrow (f|_U)^{-1}$ holomorph. □

Ein anderes Argument dafür, dass $df(z_0)$ ein Isomorphismus ist:
Wegen der Cauchy-Riemannschen Gleichungen gilt

$$\det J_f(z_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 = |f'(z_0)|^2 \neq 0 \,.$$

2.1.13. **Satz** (Biholomorphiesatz). *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, injektiv mit $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. Dann ist $f(D)$ offen und $f : D \to f(D)$ biholomorph.*

Beweis : Vgl. Diffeomorphiesatz Königsberger 2, Kap. 3, §3.3 □

2.2. **Komplexe Kurvenintegrale.**

Wir integrieren Differentialformen (kurz *Formen*) auf Kurven, deshalb diskutieren wir zunächst diesen Begriff (für eine ausführliche Behandlung siehe Analysis III).
Sei $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und betrachte die $\mathbb{C}$–Vektorräume:

$$\Lambda^p\, \mathbb{C}^* := \{ f : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C} \;:\; f \;\; \mathbb{R}\text{–multilinear \& alternierend} \}$$

Dann gilt:

- $\Lambda^0 \mathbb{C}^* = \mathbb{C}$
- $\Lambda^1 \mathbb{C}^* = \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ hat komplexe Dimension zwei, mit Basen $\{dx, dy\}$ oder $\{dz, d\bar{z}\}$.
- $\Lambda^2 \mathbb{C}^*$ hat komplexe Dim. eins, mit Basis $\{\det\}$, wobei $\det = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,
$$(v_1, v_2) \mapsto \det(v_1, v_2) = \det \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\; v_1 & \mathrm{Re}\; v_2 \\ \mathrm{Im}\, v_1 & \mathrm{Im}\; v_2 \end{pmatrix} .$$
- $\Lambda^p \mathbb{C}^* = \{0\}, p \geq 3$.

Das ***äußere Produkt (Dach-Produkt)*** von $f, g, \in \Lambda^1 \mathbb{C}^*$ ist $f \wedge g \in \Lambda^2 \mathbb{C}^*$, wobei

$$(f \wedge g)(v_1, v_2) = \det \begin{pmatrix} f(v_1) & f(v_2) \\ g(v_1) & g(v_2) \end{pmatrix} \,, \quad v_1, v_2 \in \mathbb{C} \,.$$

[2] Später sehen wir, dass eine holomorphe Abbildung sogar $\mathscr{C}^\infty$ ist.

Es folgt

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0\ ,\ dx \wedge dy = -dy \wedge dx = \det\ .$$

Das Dach-Produkt ist linear in beiden Faktoren.

$$(a\,dx + b\,dy) \wedge (a_1\,dx + b_1\,dy) = (ab_1 - a_1 b)\,dx \wedge dy\ .$$

2.2.1. **Definition.**

Eine p–Form auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$ ist eine Abbildung $\omega : D \to \Lambda^p\mathbb{C}^*$. ω heißt differenzierbar bzgl. der Klasse $\mathscr{C}^k$, falls ω als Abbildung zwischen endlich-dim. Vektorräumen diffbar bzgl. der Klasse $\mathscr{C}^k$ ist.

- Eine 0–Form ist eine Abbildung $f : D \to \mathbb{C}$.
- Eine 1–Form hat die Gestalt

  $$\omega = a\,dx + b\,dy = \underbrace{\frac{1}{2}(a - ib)}_{=:\alpha}\,dz + \underbrace{\frac{1}{2}(a + ib)}_{=:\beta}\,d\overline{z} = \alpha\,dz + \beta\,d\overline{z}$$

  wobei $a, b, \alpha, \beta : D \to \mathbb{C}$.

  $$\begin{aligned} \omega \text{ ist diffbar bzw. } \mathscr{C}^k &\iff a, b \text{ diffbar bzw. } \mathscr{C}^k \\ &\iff \alpha, \beta \text{ diffbar bzw. } \mathscr{C}^k \end{aligned}$$

  Für zwei 1–Formen

  $$\omega = a\,dx + b\,dy = \alpha dz + \beta d\overline{z}$$

  $$\omega_1 = a_1 dx + b_1 dy = \alpha_1 dz + \beta_1 d\overline{z}$$

  gilt:

  $$\begin{aligned} \omega = \omega_1 &\iff a(z) = a_1(z)\ ,\ b(z) = b_1(z)\,,\ \forall\, z \in D \\ &\iff \alpha(z) = \alpha_1(z)\ ,\ \beta(z) = \beta_1(z)\,,\ \forall\, z \in D \end{aligned}$$

- Eine 2–Form hat die Gestalt

  $$\omega = c\ dx \wedge dy = \frac{i}{2}\ c\ dz \wedge d\overline{z}, \quad c : D \to \mathbb{C}$$

2.2.2. **Definition.** ***Das äußere Differential*** einer diffbaren Form ist folgendermaßen definiert:

- Ist $f : D \to \mathbb{C}$ eine 0-Form, so ist

  $$df := \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = \frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,d\overline{z}\ .$$

- Ist $\omega = a\,dx + b\,dy$ eine 1–Form, so ist

  $$d\omega := da \wedge dx + db \wedge dy = \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dx \wedge dy\ .$$

- Ist ω eine 2–Form, so ist $d\omega := 0$.
  Wichtig:

  $$(*) \qquad \boxed{d(df) = 0} \quad \text{für alle } f \in \mathscr{C}^2(D),$$

  weil

  $$d(df) = \underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)}_{=0 \text{ nach dem Satz von Schwarz}}\ dx \wedge dy = 0$$

2.2.3. **Definition.**

(i) Sei ω eine 1-Form auf $D \subset \mathbb{C}$.
ω ist *geschlossen* $\iff$ ω ist diffbar und $d\omega = 0$
ω ist *exakt* $\iff$ $\exists\, F : D \to \mathbb{C}$ diffbar mit $dF = \omega$.
F heißt *Stammfunktion* von ω.

(ii) $F : D \to \mathbb{C}$ heißt *Stammfunktion* von $f : D \to \mathbb{C}$, falls F holomorph ist und $F'(z) = f(z),\ z \in D$.
Ist $\omega \in \mathscr{C}^1$, so gilt $\boxed{\omega \text{ exakt } \Rightarrow \omega \text{ geschlossen}}$ wegen $(*)$.

2.2.4. **Lemma.**

(i) *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ reell-diffbar. Dann ist*
$\omega = f(z)\, dz$ *geschlossen* $\iff$ *f holomorph.*

(ii) *Sei $f : D \to \mathbb{C}$. Dann gilt*
$\omega = f(z)\, dz$ *exakt* $\iff$ *f hat eine Stammfunktion.*

Beweis :

(i) $d\omega = df \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial z} \underbrace{dz \wedge dz}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\, d\overline{z} \wedge dz$
also $d\omega = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \iff f$ holomorph

(ii) Sei $F : D \to \mathbb{C}$ reell-diffbar.

$$\begin{aligned} dF = f(z)\, dz &\iff \frac{\partial F}{\partial z}\, dz + \frac{\partial F}{\partial \overline{z}}\, d\overline{z} = f(z) dz \\ &\iff \frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = 0\,, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = f \\ &\iff F \ \text{ holomorph und } \ F' = f \end{aligned}$$

□

2.2.5. **Definition.** ***Eine (parametrisierte) Kurve*** ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$; $\gamma(a), \gamma(b)$ heißen ***Anfangspunkt*** und ***Endpunkt*** von γ,
$|\gamma| := \{\gamma(t) : a \leq t \leq b\}$ heißt ***Träger*** oder ***Spur*** von γ.
Seien $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C},\ \gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ Kurven, so dass der Endpunkt von γ_1 der Anfangspunkt von γ_2 ist, $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. Die ***zusammengesetzte Kurve*** ist $\gamma_1 * \gamma_2 : [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \to \mathbb{C}$,

$$\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & ,\ t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(a_2 - b_1 + t) & ,\ t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases}$$

Eine Kurve heißt ***stückweise*** $\mathscr{C}^1$, wenn man sie in endlich viele $\mathscr{C}^1$–Kurven zerlegen kann, d.h. wenn gilt $\gamma = \gamma_1 * \ldots * \gamma_m$ und $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ sind $\mathscr{C}^1$–Kurven.
Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine Kurve, so heißt $\gamma^{-1} : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\gamma^{-1}(t) = \gamma(a + b - t)$ die ***umorientierte Kurve***.