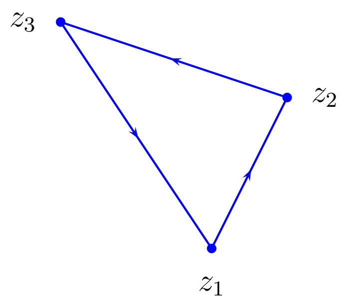
# 6. VORLESUNG, 04.05.2009

2.2.6. **Beispiel.** (i) Für $z, w \in \mathbb{C}$ sei $[z, w]$ die Kurve

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = (1-t)z + tw,$$

genannt die *Strecke* von $z$ nach $w$. Es ist $[z,w]^{-1} = [w,z]$.
Für $z_1, z_2, \dots, z_m$ bezeichnen wir mit $[z_1, z_2, \dots, z_m] = [z_1, z_2] * [z_2, z_3] * \dots * [z_{m-1}, z_m]$ den *Streckenzug* von $z_1$ nach $z_m$ über $z_2, \dots, z_{m-1}$.
Ein Streckenzug der Form $[z_1, z_2] * [z_2, z_3] * [z_3, z_1]$ heißt *Dreieckskurve*.




(ii) Seien $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Dann definiert $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ einen positiv orientierten *Kreisbogen*. Wenn $b = a + 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{N}$ ist, so wird der Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ genau $k$–mal durchgelaufen.

2.2.7. **Definition.** Für $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig, $f = u + iv$, setze

$$\int_a^b f(t)\, dt := \int_a^b f dt := \int_a^b u(t)\, dt + i \int_a^b v(t)\, dt$$

2.2.8. **Lemma.** *Für $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig gilt:*

(i)

$$\int_a^b (f+g)\, dt := \int_a^b f dt + \int_a^b g dt, \quad \int_a^b (\lambda f)\, dt = \lambda \int_a^b f dt, \ \lambda \in \mathbb{C},$$

(ii)

$$\left| \int_a^b f dt \right| \le \int_a^b |f| dt \le \sup_{[a,b]} |f| \cdot (b-a)$$

(iii) *Sei $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $F'(t) = \frac{dF}{dt}(t) = f(t)$ für alle $t \in [a,b]$. Dann gilt*

$$\int_a^b f dt = F(b) - F(a).$$

(iv) *$f_n \to f$ gleichmäßig in $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f_n dt \to \int_a^b f dt$ $(n\to\infty)$.*

*Beweis* :
Zu (ii): Sei $z := \int_a^b f dt$. Ist $z = 0$, so ist (ii) klar. Falls $z \neq 0$, schreibe $z = |z|e^{i\varphi}$, also

$$|z| = ze^{-i\varphi} = \int_a^b fe^{-i\varphi} dt = Re \int_a^b fe^{-i\varphi} dt = \int_a^b \underbrace{\mathrm{Re}(fe^{-i\varphi})dt}_{\le |fe^{-i\varphi}| = |f|} \le \int_a^b |f| dt$$

Zu (iii): Hauptsatz für Real- und Imaginärteil.

□

2.2.9. **Definition.** Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein $\mathscr{C}^1$–Kurve, $f : |\gamma| \to \mathbb{C}$ stetig. Das ***Kurvenintegral*** der 1–Form $f(z)\,dz = f dz$ ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_\gamma f dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Das ***Integral nach Bogenlänge*** von $f$ ist

$$\int_\gamma f|dz| := \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt.$$

$$\ell(\gamma) = \int_\gamma |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)|dt.$$

ist die ***Länge der Kurve*** $\gamma$.
Ist $\gamma$ eine stückweise $\mathscr{C}^1$–Kurve, $\gamma = \gamma_1 * \ldots * \gamma_m$ eine Zerlegung in $\mathscr{C}^1$–Kurven, $f : |\gamma| \to \mathbb{C}$ stetig, setze

$$\int_\gamma f dz := \int_{\gamma_1} f dz + \ldots + \int_{\gamma_m} f dz\ . \tag{2.8}$$

Dieser Wert ist von der Zerlegung unabhängig.

2.2.10. **Lemma.**
*(i) Beide Typen von Integralen sind linear, z.B.*

$$\int_\gamma (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\,dz = \lambda_1 \int_\gamma f_1\,dz + \lambda_2 \int_\gamma f_2\,dz.$$

*(ii) Formel* (2.8) *gilt auch, wenn* $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ *nur stückweise* $\mathscr{C}^1$ *sind.*
*(iii)* ***Invarianz gegenüber Parametertransformationen:*** *Sei* $\tau : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ *bijektiv und stetig differenzierbar, so dass* $\tau'(s) \neq 0$ *für alle* $s \in [\alpha,\beta]$ *(Parametertransformation) und sei* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *eine* $\mathscr{C}^1$*–Kurve. Dann gilt:*

$$\int_{\gamma\circ\tau} f\,dz = \int_\gamma \operatorname{sgn}(\tau') f\,dz\ .$$

*Insbesondere*

$$\int_{\gamma^{-1}} f\,dz = -\int_\gamma f\,dz\ .$$

*(iv)* ***Zusammenhang zwischen Stammfunktion und Kurvenintegral:***
*Ist* $f$ *stetig in* $D, F : D \to \mathbb{C}$ *Stammfunktion von* $f$ *(siehe Definition 2.2.3), so gilt*

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))}$$

*Insbesondere gilt für jede geschlossene stückweise* $\mathscr{C}^1$*–Kurve:*

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 0\,.}$$

*Hat eine stetige Funktion* $f : D \to \mathbb{C}$ *eine Stammfunktion, so hängt das Kurvenintegral von* $f(z)\,dz$ *nur von Anfangs– und Endpunkt der Kurve und nicht vom Verlauf der Kurve ab, d.h. sind* $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to D$ *stückweise* $\mathscr{C}^1$*– Kurven mit* $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$*, so gilt*

$$\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma_2} f dz.$$

*Diese Eigenschaft heißt* ***Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals von*** $fdz$.
*(v) Sei* $f$ *stetig auf dem Träger der stückweisen* $\mathscr{C}^1$*–Kurve* $\gamma$.
*Dann gilt die* ***Standardabschätzung für Integrale****:*

$$\boxed{\Big|\int_\gamma f dz\Big| \le \int_\gamma |f||dz| \le \sup_{|\gamma|} |f| \cdot \ell(\gamma).}$$

*Beweis* :
Zu (iii):

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma\circ\tau} f dz &= \int_\alpha^\beta (f\circ\gamma\circ\tau)(s)\cdot(\gamma\circ\tau)'(s)\,ds \\
&= \int_\alpha^\beta (f\circ\gamma)\underbrace{(\tau(s))}_{t}\gamma'\underbrace{(\tau(s))}_{t}\underbrace{\tau'(s)\,ds}_{dt} \underset{\tau(s)=t}{=} \int_{\tau(\alpha)}^{\tau(\beta)} (f\circ\gamma)(t)\cdot\gamma'(t)dt \\
&= \operatorname{sgn}(\tau')\int_a^b (f\circ\gamma)(t)\gamma'(t)\,dt = \operatorname{sgn}(\tau')\int_\gamma f dz \\
\text{weil } &\int_{\tau(\alpha)}^{\tau(\beta)} = \begin{cases} \int_a^b \text{ falls } \tau \text{ wachsend d.h. } \tau'>0 \\ \int_b^a = -\int_a^b \text{ falls } \tau \text{ fallend d.h. } \tau'<0\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

Zu (iv):

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b \frac{dF}{dz}(\gamma(t))\cdot\frac{d\gamma}{dt}(t)\,dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}(F\circ\gamma)(t)\,dt = F(\gamma(b) - F(\gamma(b))
\end{aligned}$$

nach 2.2.8

Zu (v):

$$\begin{aligned}
|\int_\gamma f dz| &= |\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt| \le \underbrace{\int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,dt}_{=:\int_\gamma |f|\,|dz|} \\
&\le \sup_{t\in[a,b]} |f\circ\gamma(t)| \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt \\
&= \sup_{z\in|\gamma|} |f(z)|\,\ell(\gamma)
\end{aligned}$$

□

2.2.11. **Satz** (Hauptsatz über Kurvenintegrale). *Sei* $D \subset \mathbb{C}$ *ein Gebiet,* $f : D \to \mathbb{C}$ *stetig. Dann sind äquivalent:*

(i) $f$ *besitzt eine Stammfunktion,*
(ii) $\int_\gamma f(z)dz = 0$ *für jede geschlossene stückweise* $\mathscr{C}^1$*–Kurve,*
(iii) *das Kurvenintegral von* $fdz$ *ist wegunabhängig.*

**Zusatz.** *Ist das der Fall, so ist eine Stammfunktion durch*

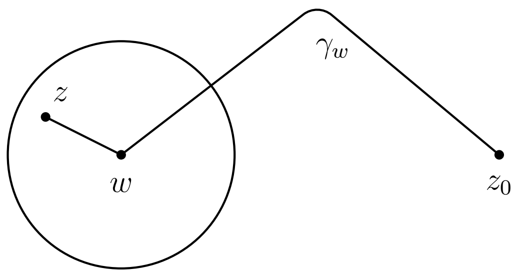
$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta =: \int_{z_0}^z f(\zeta)\,d\zeta$$

*gegeben, wobei* $z_0$ *beliebig und fest ist und* $\gamma_z$ *eine beliebige stückweise* $\mathscr{C}^1$*–Kurve von* $z_0$ *nach* $z$ *in* $D$ *ist. (z.B. ein Streckenzug; existiert stets, da* $D$ *Gebiet).*

*Beweis* : (i)⇒(ii) folgt aus Lemma 2.2.10(iv).
(ii)⇒(iii) Seien $\gamma, \delta$ Kurven mit demselben Anfangs- und Endpunkt. Dann ist $\gamma * \delta^{-1}$ geschlossen und

$$0 = \int_{\gamma*\delta^{-1}} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_{\delta^{-1}} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz - \int_\delta f(z)\,dz\ .$$

(iii)⇒(i) Seien $w \in D$ beliebig, fest. $D$ offen ⇒ $\exists\ \rho > 0 : B_\rho(w) \subset D$.
Sei $\gamma_w$ ein Streckenzug von $z_0$ nach $w$ in $D$. Dann ist $\gamma_w * [w, z]$ ein Streckenzug von $z_0$ nach $z$ in $D$ für alle $z \in B_\rho(w)$.




Es folgt

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{\gamma_w*[w,z]} f(\zeta)\,d\zeta \\ &= \int_{\gamma_w} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{[w,z]} f(\zeta)\,d\zeta \\ &= F(w) + f(w)(z-w) + \int_{[w,z]} (f(\zeta) - f(w))\,d\zeta\ , \ \text{ da } \int_{[w,z]} d\zeta = z - w\ . \end{aligned}$$

$f$ stetig in $w \Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta \in (0, \varrho)\ \forall z \in B_\delta(w) : |f(z) - f(w)| < \varepsilon$.
Wegen der Standardabschätung 2.2.10(v) gilt:

$$\Big| \int_{[w,z]} (f(\zeta) - f(w))\,d\zeta \Big| \leq \varepsilon \int_{[w,z]} |d\zeta| = \varepsilon |z - w|$$

und daher

$$\lim_{z\to\infty} \frac{F(z) - F(w)}{z - w} = f(w)$$

also ist $F$ komplex-differenzierbar in $w$ und $F'(w) = f(w)$. $\square$