

2.2.12. Beispiel. Die Funktion $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$ hat keine Stammfunktion, da $\int_{\partial B_1(0)} dz/z = 2\pi i$. Hätte f eine Stammfunktion, so wäre das Integral Null. ∇f hat aber eine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{re^{i\zeta} : r \geq 0\}$ für alle $\zeta \in \mathbb{R}$, nämlich Zweige des Logarithmus.

2.2.13. Beispiel. Ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ heißt **Sterngebiet**, wenn es $z_0 \in D$ gibt, so dass für alle $z \in D$ gilt $[z_0, z] \subset D$. Wir sagen, dass D Sterngebiet bzgl. z_0 ist oder z_0 ein Zentrum von D ist.

2.2.14. Beispiel.

- (i) Jede konvexe offene Menge ist Sterngebiet. Dabei ist jeder Punkt der Menge ein Zentrum.
- (ii) \mathbb{C}_- ist Sterngebiet (aber nicht konvex). Die Zentren von \mathbb{C}_- sind alle $z \in \mathbb{R}_+$.
- (iii) \mathbb{C}^* oder ein Kreisring sind nicht Sterngebiete.

2.2.15. Satz (Hauptsatz über Kurvenintegrale in Sterngebieten). Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Sterngebiet bzgl. $z_0 \in D$, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Äquivalent:

- (i) f besitzt eine Stammfunktion,
- (ii) $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ für den Rand $\partial\Delta$ jedes Dreiecks $\Delta \subset D$ mit z_0 als Ecke.
- (iii) Das Kurvenintegral von $f dz$ ist wegunabhängig. Ist das der Fall, so ist eine Stammfunktion durch

$$F : D \rightarrow \mathbb{C}, \quad F(z) = \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta$$

gegeben.

Beweis: Analog zu 2.2.11. In (iii) \Rightarrow (ii) setze $\gamma = [z_0, z]$. □

2.3. Der Cauchysche Integralsatz. Unser Ziel ist zu zeigen, dass eine holomorphe Funktion f in einem Sterngebiet die Beziehung $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ erfüllt, für alle geschlossenen stückweisen \mathcal{C}^1 -Kurven. Insbesondere besitzt f Stammfunktionen.

2.3.1. Lemma (von Goursat). Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph in D . Dann gilt $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ für den Rand $\partial\Delta$ jedes abgeschlossenen Dreiecks $\Delta \subset D$.

Beweis: Hier betrachten wir auf dem Rand eines Dreiecks stets die Orientierung gegen den Uhrzeigersinn. Sei $\Delta \subset D$ ein Dreieck. Setze $\alpha := |\int_{\partial\Delta} f(z) dz|$. Seien $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \Delta^{(3)}, \Delta^{(4)}$ die vier Teildreiecke die aus Δ durch Seitenhalbierung hervorgehen. Dann ist

$$\int_{\partial\Delta} f dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\partial\Delta^{(j)}} f dz.$$

(Die Integrale über gemeinsame Seiten heben sich wegen der umgekehrten Orientierung auf.) Sei Δ_1 dasjenige der Dreiecke $\Delta^{(j)}$, für das der Betrag des Integrals maximal wird. Daraus folgt

$$\alpha \leq 4 \cdot \left| \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz \right|.$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Teilungsprozesses erhalten wir Dreiecke

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots \quad \text{mit} \quad \Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots \quad (*)$$

und $\alpha \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) dz \right|$, $\ell(\partial\Delta_n) = \frac{1}{2^n} \ell(\partial\Delta)$, $\text{diam } \Delta_n = 2^{-n} \text{diam } \Delta$, $n \in \mathbb{N}$. Die Mengen Δ_n sind kompakt. Aus (*) $\Rightarrow \exists z_0 \in D$ mit $z_0 \in \bigcap_{n \geq 1} \Delta_n$. f ist in z_0 komplex-differenzierbar, daher gibt es $\varphi : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = 0$ und

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varphi(z)(z - z_0).$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit $|\varphi(z)| < \varepsilon$ für alle $z \in B_\delta(z_0)$. Da $\partial\Delta_n$ geschlossen sind, gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta_n} dz &= 0 \quad , \quad \int_{\partial\Delta_n} (z - z_0) dz = 0 \\ \Rightarrow \int_{\partial\Delta_n} f(z) dz &= f(z_0) \int_{\partial\Delta_n} dz + f'(z_0) \int_{\partial\Delta_n} (z - z_0) dz + \int_{\partial\Delta_n} \varphi(z)(z - z_0) dz \\ &= \int_{\partial\Delta_n} \varphi(z)(z - z_0) dz \end{aligned}$$

Wegen $z_0 \in \Delta_n$, $\text{diam } \Delta_n \rightarrow 0$ gilt $\Delta_n \subset B_\delta(z_0)$ für großes $n \in \mathbb{N}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \alpha &\leq 4^n \cdot \left| \int_{\partial\Delta_n} \varphi(z)(z - z_0) dz \right| \leq 4^n \cdot \varepsilon \cdot \sup_{z \in \Delta_n} |z - z_0| \cdot \ell(\partial\Delta_n) \\ &= 4^n \cdot \varepsilon \cdot \text{diam } \Delta_n \ell(\partial\Delta_n) = 4^n \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \text{diam } \Delta \frac{1}{2^n} \cdot \ell(\partial\Delta_n) \\ &= \varepsilon \cdot \text{diam } \Delta \cdot \ell(\partial\Delta) \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt $\alpha = 0$. □