2.3.2. **Satz** (Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Sterngebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für alle geschlossenen stückweise $\mathscr{C}^1$–Kurven in D. Insbesondere besitzt f eine Stammfunktion in D.*

Beweis : Folgt aus 2.3.1 und 2.2.12. □

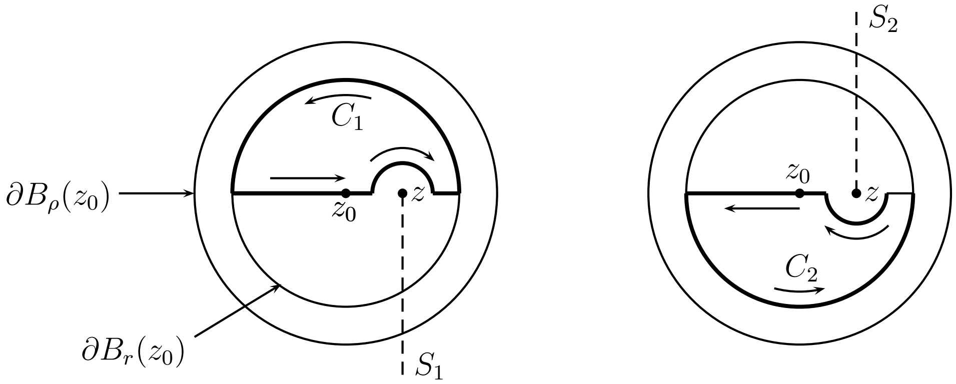
2.3.3. **Satz** (Cauchysche Integralformel). *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph in der offenen Menge D. Wenn*

$$\overline{B_r(z_0)} \subset D \tag{2.9}$$

ist, so gilt :

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\,, \quad \textit{für } z \in B_r(z_0)} \tag{2.10}$$

Beweis : Sei $z \in B_r(z_0)$ gegeben. Wegen (2.9) gibt es $\rho > r$ mit $B_\rho(z_0) \subset D$. Sei C_1 die durch Pfeile



angeordnete Kurve, wo der kleine Halbkreis um z den genügend kleinen Radius $\delta > 0$ hat. Entsprechend ist C_2 konstruiert durch Spiegelung um $\overline{z_0 z}$.
Sind S_1, S_2 senkrechte Halbgeraden zu $\overline{z_0 z}$ durch z, so sind $H_j = B_\rho(z_0) \setminus S_j$ Sterngebiete ($j = 1, 2$). Die Funktionen $H_j \ni \zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ sind holomorph und $\int_{C_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = 0$, $j = 1, 2$, nach 2.3.2 Wir addieren beide Integrale und dabei zerlegen wir sie in Strecken- und Halbkreisintegrale. Die Anteile über die Strecken heben sich wegen der verschiedenen Orientierungen auf:

$$0 = \int\limits_{C_1} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \int\limits_{C_2} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \int\limits_{\partial B_\delta(z)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\,,$$

$$\int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \int\limits_{\partial B_\delta(z)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} := \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z + \delta e^{it})}{\delta e^{it}} i\delta e^{it} dt = i\int_0^{2\pi} f(z + \delta e^{it})dt$$

$$= \underbrace{i\int\limits_0^{2\pi} [f(z + \delta e^{it}) - f(z)]\,dt}_{\to 0\ (\delta \to 0)} + \underbrace{i\int\limits_0^{2\pi} f(z)dt}_{=2\pi i f(z)}\,,$$

weil

$$\Big|\int_0^{2\pi} [f(z + \delta e^{it}) - f(z)]dt\Big| \le \max_{t \in [0,2\pi]} |f(z + \delta e^{it}) - f(z)| \cdot 2\pi \longrightarrow 0\,, \quad \delta \to 0\,.$$

□

Sei γ eine geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$. Die *Windungszahl (Umlaufzahl)* ist

$$n(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

und gibt an, wie oft die Kurve γ den Punkt z im positiven Sinn umläuft. Z.B.

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\,,\ \gamma(t) = e^{ikt}\,,\ k \in \mathbb{Z} \quad \rightsquigarrow \quad n(\gamma, 0) = k\,.$$

Es gilt $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$. Beweis: Zerlege $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_m = b$, so dass $\gamma_k := \gamma|_{[c_{k-1}, c_k]} : [c_{k-1}, c_k] \to U_k$, wobei ein Zweig des Logarithmus $\ell_k : U_k \to \mathbb{C}$ auf U_k existiert. Dann gilt $\gamma = \gamma_1 * \ldots * \gamma_m$ und

$$\begin{aligned} 2\pi i \cdot n(\gamma, z) &= \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{k=1}^m [\ell_k(\gamma(c_k)) - \ell_k(\gamma(c_{k-1}))] \\ &= \underbrace{\ell_m(\gamma(c_m)) - \ell_1(\gamma(c_0))}_{\in 2\pi i\mathbb{Z}} + \sum_{k=1}^{m-1} \underbrace{[\ell_k(\gamma(c_k)) - \ell_{k+1}(\gamma(c_k))]}_{\in 2\pi i\mathbb{Z}}\,, \end{aligned}$$

da für zwei Zweige ℓ_1, ℓ_2 des Logarithmus gilt $\ell_1(z), \ell_2(z) \in \log|z| + i\arg z + 2\pi i\mathbb{Z}$.

2.3.4. **Satz** (allgemeine Cauchy-Formel). *Sei D ein Sterngebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei γ eine geschlossene stückweise $\mathscr{C}^1$–Kurve und $z \in D \setminus |\gamma|$. Dann gilt:*

$$n(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Beweis : Schreibe

$$(*) \qquad \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta + \int_\gamma \frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta\,.$$

Nach Definition ist $\int_\gamma \frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i \cdot n(\gamma, z)$. Definiere

$$g_z : D \to \mathbb{C}, \quad g_z(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & , \quad \zeta \neq z \\ f'(z) & , \quad \zeta = z\,. \end{cases}$$

g_z ist holomorph in $D \setminus \{z\}$ und stetig in D. Das Lemma von Goursat und der Cauchysche Integralsatz sind noch gültig (siehe Übungsblatt 5, 2a). Also $\int_\gamma g_z(\zeta) d\zeta = 0$ und das erste Integral in $(*)$ verschwindet. □

Für $\gamma = \partial B_r(z_0)$ gilt

$$n(\gamma, z) = \begin{cases} 1 & , \quad z \in B_r(z_0) \\ 0 & , \quad z \notin \overline{B_r(z_0)}\,, \end{cases}$$

also

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} f(z) & , \quad z \in B_r(z_0) \\ 0 & , \quad z \notin \overline{B_r(z_0)}\,. \end{cases}$$

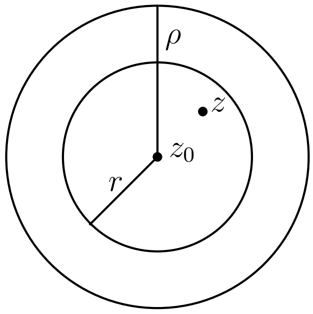
2.3.5. **Satz** (Potenzreihenentwicklungssatz). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in D$ und $\rho = d(z_0, \partial D) := \inf\limits_{z \in \partial D} |z - z_0| > 0$. Dann gilt*

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n (z - z_0)^n \quad \textit{für alle } z \in B_\rho(z_0)\,,$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \quad \text{für alle } r \in (0,\rho)\ . \tag{2.11}$$

Beweis : Sei $z \in B_\rho(z_0)$. Wähle $r \in (|z-z_0|, \rho)$.



Dann ist $\overline{B_r(z_0)} \subset B_\rho(z_0)$ und die Cauchysche Integralformel impliziert

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\ .$$

Nun ist

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 + z_0 - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)\left(1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)}$$

und $|z-z_0| < r = |\zeta - z_0|$, also $\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0} < 1$. Somit gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}\ .$$

Diese Funktionenreihe konvergiert normal und daher gleichmäßig für $\zeta \in \partial B_r(z_0)$, da

$$\sup_{\zeta\in\partial B_r(z_0)} \left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{r} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|z-z_0|}{r}\right)^n < \infty\ .$$

Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\, d\zeta \cdot (z-z_0)^n\ . \end{aligned}$$

(Wir können Integral und Summe vertauschen wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe.) □

2.3.6. **Folgerung.** *Sei D offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:*

(i) *f ist beliebig oft komplex–differenzierbar, d.h. man kann induktiv definieren $f^{(n)} : D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, durch $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$. Insbesondere sind alle Ableitungen $f^{(n)}$ holomorph.*

(ii) *Es gilt*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$$

für alle $r \in (0, d(z, \partial D))$. *(Cauchy–Formel für Ableitungen)*

(iii) f *ist um jedes* $z_0 \in D$ *in eine Taylorreihe entwickelbar:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \quad \textit{für alle } z \in B_{d(z_0,\partial D)}(z_0)\ .$$

Beweis : Nach 2.3.5 gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, mit a_n aus (2.11). Aus Beispiel 2.1.7(iv) wissen wir, dass eine Potenzreihe gliedweise differenziert werden darf, also

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

für alle $z \in B_\rho(z_0)$. Dasselbe Argument induktiv angewendet zeigt, dass f unendlich oft komplex–differenzierbar ist und

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1) a_k (z - z_0)^{k-n}$$

für alle $z \in B_\rho(z_0)$. Für $z = z_0$ folgt $f^{(n)}(z_0) = n! a_n$, also $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. □

2.3.7. **Bemerkung.**

(i) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt um den Punkt $z_0 \in D$ in eine *Potenzreihe entwickelbar*, falls es $\rho > 0$ gibt und eine Potenzreihe $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$, so dass $B_\rho(z_0) \subset D$ und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ für alle $z \in B_\rho(z_0)$. Die Funktion f heißt ***analytisch***, falls sie um jeden Punkt $z_0 \in D$ in eine Potenzreihe entwickelbar ist. Wir haben eben gezeigt:

$$\boxed{f \text{ analytisch} \iff f \text{ holomorph.}}$$

(ii) Die Reihe in (i) ist durch f eindeutig bestimmt, da $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$. Ist f analytisch, so wird f durch seine Taylorreihe dargestellt.

(iii) Der Konvergenzradius der Taylorreihe von f kann echt grösser sein als der Abstand $d(z_0, \partial D)$ des Entwicklungspunktes zum Rand. Für den Hauptzweig $\log : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ hat die Taylorreihe in $z_0 \in \mathbb{C}_-$, $\operatorname{Re} z_0 < 0$, die Form

$$\log(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n z_0^n}(z - z_0)^n$$

mit Konvergenzradius $|z_0| > |\operatorname{Im} z_0| = d(z_0, \partial \mathbb{C}_-)$.