10. VORLESUNG, 18.05.2009

2.5. Cauchysche Abschätzungen.

2.5.1. Satz. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(D)$, $\overline{B_r(z_0)} \subset D$ und $M = \sup\limits_{\partial B_r(z_0)} |f|$.*

Sei $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ die Potenzreihenentwicklung von f um z_0. Dann gilt:

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}, \quad |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Der Potenzreihenentwicklungssatz 2.3.5 impliziert:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta$$

Mit der Standardabschätzung (2.2.10 (v)) folgt

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{\zeta \in \partial B_r(z_0)} \underbrace{\frac{|f(\zeta)|}{|(\zeta - z_0)^{n+1}|}}_{= r^{n+1}} \underbrace{\ell(\partial B_r(z_0))}_{= 2\pi r} = \frac{M}{r^n}.$$

$\square$

2.5.2. Definition (Weierstrass). Eine Funktion $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ heißt *ganze* Funktion. Eine ganze Funktion, die kein Polynom ist, heißt *transzendent*.

Beispiele: Polynome, $\exp$, $\sin$, $\cos$.

2.5.3. Satz (Satz von Liouville). *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Beweis: Die Taylorentwicklung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ von f um 0 konvergiert *überall* in $\mathbb{C}$ (Satz 2.3.5). Da f beschränkt ist, gibt es ein $M > 0$, so dass $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Aus 2.5.1 folgt $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$ für alle $r > 0$. Da r beliebig groß werden kann, folgt $a_n = 0$ für alle $n \geq 1$, d.h. $f(z) = a_0$. $\square$

2.5.4. Satz (Fundamentalsatz der Algebra). *Ein nicht konstantes Polynom $P \in \mathbb{C}[z]$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

Beweis: Angenommen $P(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ holomorph und es gilt

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^n| \cdot \left|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \ldots + a_n\right|} \to 0, \quad |z| \to \infty$$

$(P(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$ mit $a_n \neq 0)$. f ist also beschränkt und konstant nach 2.5.3; folglich ist P konstant $\lightning$. $\square$

2.5.5. Satz. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(D)$, $K \subset D$ kompakt und $0 < \varepsilon < d(K, \partial D)$. Sei $K_\varepsilon = \{z \in D : d(z, K) \leq \varepsilon\}$. Dann gilt*

$$\|f^{(n)}\|_K \leq \frac{n!}{\varepsilon^n} \|f\|_{K_\varepsilon}.$$

Beweis: Für $z \in K$ gilt $\overline{B_\varepsilon(z)} \subset K_\varepsilon$, also

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{\varepsilon^n} \|f\|_{K_\varepsilon}.$$

$\square$

2.6. **Maximumprinzip, Offenheitssatz, Schwarzsches Lemma.**

2.6.1. **Satz** (Mittelwertsatz für holomorphe Funktionen). *Ist f holomorph in einer Umgebung von $\overline{B_r(z_0)}$, so gilt*

$$f(z_0) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt}_{\text{Mittelwert von } f \text{ auf } |z-z_0|=r} \qquad (*)$$

nach der Cauchy–Formel.

Wir sagen, dass eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ die *Mittelwerteigenschaft* hat, wenn $(*)$ für jede $\overline{B_r(z_0)} \subset D$ gilt.

2.6.2. **Satz** (Maximumprinzip). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und erfüllt die Mittelwerteigenschaft. Hat $|f|$ ein lokales Maximum in D, so ist f konstant.*

Beweis: Sei $z_0 \in D$ ein lokales Maximum, $\overline{B_R(z_0)} \subset D$ eine Umgebung von z_0 mit $|f(z)| \le |f(z_0)|$ für $z \in \overline{B_R(z_0)}$.
Ist $f(z_0) = 0$, so ist $f|_{B_R(z_0)} \equiv 0$ und nach Identitätssatz $f \equiv 0$.
Ist $f(z_0) \neq 0$, so $f(z_0) = |f(z_0)|e^{i\varphi}$, $(fe^{-i\varphi})(z_0) = |f(z_0)| > 0$.
Wir ersetzen f durch $fe^{-i\varphi}$ und dürfen annehmen, dass $f(z_0) > 0$. Es gilt also $f(z_0) \ge |f(z)|$ für alle $z \in B_R(z_0)$.
Betrachte nun die Funktion $g : B_R(z_0) \to \mathbb{R}$, $g(z) = \mathrm{Re}(f(z_0) - f(z))$.

- Wegen $\mathrm{Re}\, f(z) \le |f(z)| \le f(z_0)$ gilt $g \ge 0$, $g(z_0) = 0$.
- Durch Zerlegung in Real- und Imginärteil von $(*)$ folgt, dass auch $\mathrm{Re}\, f$ die Mittelwerteigenschaft hat, also auch g.

Damit

$$0 = g(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{it})\,dt\ .$$

Der Integrand ist stetig und $\ge 0 \Rightarrow g(z_0 + re^{it}) = 0$ für alle $t \in [0, 2\pi], 0 < r \le R \Rightarrow$ $\mathrm{Re}\, f$ konstant in $B_R(z_0)$.
Aber $|f(z)| \le f(z_0) = \mathrm{Re}\, f(z) \le |f(z)| \Rightarrow |f(z)| \equiv \mathrm{Re}\, f(z) \Rightarrow \mathrm{Im}\, f(z) = 0 \Rightarrow f(z) = \mathrm{Re}\, f(z) = f(z_0)$ für $z \in B_R(z_0)$.
Identitätssatz $\Rightarrow f(z) = f(z_0)$ für $z \in D$. □

2.6.3. **Satz** (Maximumprinzip für beschränkte Gebiete). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ beschränkt, $f \in \mathcal{O}(D) \cap \mathscr{C}(\overline{D})$. Dann nimmt $|f|$ ihr Maximum auf dem Rand an:*

$$|f(z)| \le \|f\|_{\partial D} \text{ für alle } z \in D\ .$$

2.6.4. **Satz** (Minimumprinzip). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in \mathcal{O}(D)$ und $z_0 \in D$, so dass $|f|$ ein lokales Minimum in z_0 hat. Dann gilt $f(z_0) = 0$ oder f ist konstant in D.*

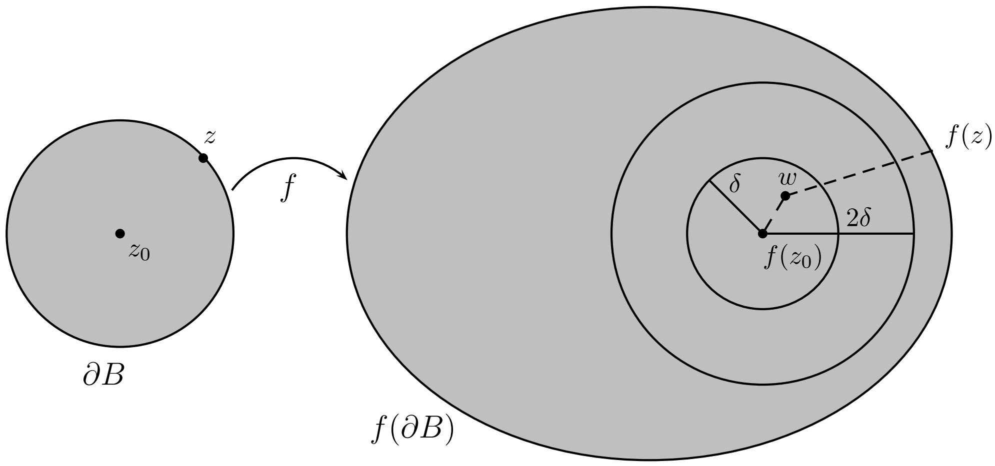
Beweis: Ist $f(z_0) \neq 0$, so $f(z) \neq 0$, $z \in U(z_0)$ und $\frac{1}{f} \in \mathcal{O}(U)$ und $\frac{1}{|f|}$ hat ein lokales Maximum in z_0; dann ist f konstant in U also in D nach Identitätssatz. □

Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt ***offen***, wenn das Bild $f(U)$ jeder in X offenen Menge U offen in Y ist. Beachte: Im Gegensatz hierzu bedeutet Stetigkeit, dass jede in Y offene Menge V ein offenes Urbild $f^{-1}(V)$ hat. f stetig $\not\Rightarrow$ f offen, z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist nicht offen.
Sei $f : X \to Y$ stetig, bijektiv. Dann gilt: f offen $\iff$ f homöomorph.
$P : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \to \mathbb{C}^*$, $P(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ ist stetig, bijektiv, aber nicht offen.

2.6.5. **Satz** (Offenheitssatz). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(D)$ nirgends lokal konstant. Dann ist die Abbildung $F : D \to \mathbb{C}$ offen.*

Beweis : Sei $U \subset D$ offen und $z_0 \in U$. Z.z. $\exists\, \delta > 0 : B_\delta(f(z_0)) \subset f(U)$. f ist um z_0 nicht-konstant $\Rightarrow \exists\, B = B_r(z_0)$ mit $\overline{B} \subset D$ und $f(z_0) \notin f(\partial B)$ (nach Identitätssatz). Sei

$$\delta = \frac{1}{2} \min_{z \in \partial B} |f(z) - f(z_0)| \,.$$



Wir zeigen, dass $B_\delta(f(z_0)) \subset f(B)$. Sei ω mit $|\omega - f(z_0)| < \delta$. Dann gilt für alle $z \in \partial B$:

$$2\delta \le |f(z) - f(z_0)| \le |f(z) - \omega| + |f(z_0) - \omega| < |f(z) - \omega| + \delta \,, \quad \text{also}$$
$$|f(z) - \omega| > \delta$$

und folglich

$$\min_{z \in \partial B} |f(z) - \omega| > \delta > |f(z_0) - \omega| \,.$$

Dies bedeutet, dass die nicht konstante Funktion $\overline{B} \ni z \to |f(z) - \omega|$ ihr Minimum in B erreicht. Nach Minimumprinzip 2.6.4 hat sie eine Nullstelle in B, d.h. $\exists \zeta \in B$ mit $f(\zeta) = \omega \rightsquigarrow B_\delta(f(z_0)) \subset f(B)$. □

Äquivalente Fassung des Offenheitssatzes:

2.6.6. **Satz** (Satz von der Gebietstreue). *Sei D ein Gebiet, $f \in \mathcal{O}(D)$ nicht konstant. Dann ist $f(D)$ wieder ein Gebiet.*

Beweis : f nicht konstant $\rightsquigarrow$ nirgends lokal konstant (nach Identitätssatz). Offenheitssatz $\rightsquigarrow f(D)$ offen. f stetig $\rightsquigarrow f(D)$ zusammenhängend. □