11. VORLESUNG, 25.05.2009

2.6.7. **Satz** (Schwarzsches Lemma). *Sei* $\mathbb{D} = B_1(0)$. *Für jede holomorphe Abbildung* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *mit* $f(0) = 0$ *gilt*

$$|f(z)| \leqslant |z| \text{ für alle } z \in \mathbb{D} \text{ und } |f'(0)| \leqslant 1\,. \tag{2.12}$$

Gibt es $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ *mit* $|f(w)| = |w|$ *oder gilt* $|f'(0)| = 1$, *so ist* f *eine Drehung um* 0, *d.h. es gibt* $\zeta \in S^1$ *mit* $f(z) = \zeta \cdot z$ *für alle* $z \in \mathbb{D}$.

Beweis (Carathéodory) :
Sei $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ $(a_0 = f(0) = 0)$ die Taylorentwicklung von f für $z \in \mathbb{D}$. Die Potenzreihe $\sum_{n\geqslant 1} a_n z^{n-1}$ hat denselben Konvergenzradius und definiert $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$, $g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$, $z \in \mathbb{D}$. Dann gilt $f(z) = zg(z)$ und $g(0) = a_1 = f'(0)$. Sei $w \in \mathbb{D}$ fest und

$$r \in [|w|, 1]\,,\ \ w \in \overline{B_r}(0) \underset{\text{Maxprinzip}}{\Rightarrow} |g(w)| \leqslant \max_{|z|=r} |g(z)| = \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|} \leqslant \frac{1}{r}.$$

Für $r \to 1$ folgt $|g(w)| \leqslant 1$. Da w beliebig ist, folgt (2.12). Falls $|f(w)| = |w|$, $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ oder $|f'(0)| = 1$, so hat $|g|$ ein Maximum in $\mathbb{D}$. Maximumprinzip $\Rightarrow$ g ist eine Konstante vom Betrag 1, $g(z) = \zeta \in S^1$. $\square$

Eine biholomorphe Abbildung $f : D \to D$ einer offenen Menge auf sich selbst heißt ***Automorphismus von*** D. Die Menge $\operatorname{Aut}(D)$ der Automorphismen ist bzgl. der Komposition von Abbildungen eine Gruppe.

2.6.8. **Satz.** *Jeder Automorphismus* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *mit* $f(0) = 0$ *ist eine Drehung, d.h.* $\exists\, \zeta = e^{i\varphi} \in S^1$, $f(z) = \zeta \cdot z$, $z \in \mathbb{D}$.

Beweis : Nach dem Schwarzschen Lemma gilt

$$|f(z)| \leqslant |z|\,,\ \ |f^{-1}(w)| \leqslant |w| \text{ für alle } z, w \in \mathbb{D}\,.$$

Für $w = f^{-1}(z) \Rightarrow |z| = |f^{-1}f(z)| \leqslant |f(z)|$. Also $|f(z)| = |z|$, $\left|\frac{f(z)}{z}\right| = 1$, $z \neq 0 \Rightarrow$ $\exists\, \zeta \in S^1$ mit $f(z) = \zeta \cdot z$ (Gleichheit im Schwarzschen Lemma). $\square$

Betrachte nun die spezielle Möbiustransformation

$$\varphi_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D},\ \varphi_a(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z - 1} \quad (a \in \mathbb{D} \text{ fest})\,.$$

Dann gilt:

$$\varphi_a(0) = a\,,\ \varphi_a(a) = 0\,,\ \varphi_a^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{D}}\,,\ \ \text{d.h. } \varphi_a^{-1} = \varphi_a \ \text{ (siehe Aufgabe 1, Blatt 2)}$$

φ_a ist eine holomorphe Involution, die 0 und a vertauscht.

2.6.9. **Satz.**

$$\operatorname{Aut}(\mathbb{D}) = \{\, \mathbb{D} \ni z \mapsto \zeta \frac{z-a}{\bar{a}z - 1} \in \mathbb{D} : a \in \mathbb{D},\ \zeta \in S^1 \,\}.$$

Beweis : Sei $a = f^{-1}(0)$. Dann ist

$$f \circ \varphi_a \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D}) \text{ und } f \circ \varphi_a(0) = f(a) = 0\,.$$

Satz 2.6.8 $\Rightarrow \exists\, \zeta \in S^1$ mit $f \circ \varphi_a(z) = \zeta \cdot z$, $f(z) = \zeta \varphi_a^{-1}(z) = \zeta \varphi_a(z) = \zeta \cdot \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$. $\square$

2.7. **Isolierte Singularitäten.**

2.7.1. **Definition.** Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(D)$. Ein isolierter Punkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ (d.h. so dass $\exists\, r > 0 : B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset D$) heißt ***isolierte Singularität von*** f.
Wir unterscheiden drei Arten von isolierten Singularitäten:

(1) ***hebbare Singularitäten***: $\exists\, \tilde{f} \in \mathcal{O}(D \cup \{z_0\})$ mit $\tilde{f}|_D = f$.
(2) ***Pole***: nicht hebbar und $\exists\, g \in \mathcal{O}(D \cup \{z_0\})$, $p \in \mathbb{N}$ mit $f(z) = g(z)/(z-z_0)^p$ für $z \in D$.
(3) ***wesentliche Singularitäten***: weder hebbar, noch Pole.

Beispiele: Die Funktionen $\frac{z^2-1}{z-1}, \frac{\sin z}{z}, \frac{z}{e^z-1}$ haben hebbare Singularitäten in 1 bzw. in 0. Die Funktion $\frac{1}{(z-z_0)^m}$ hat einen Pol in z_0, die Funktion $e^{\frac{1}{z}}$ hat eine wesentliche Singularität in 0. Die Funktion $\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ hat Pole in $z_k = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. Der Punkt 0 ist keine isolierte Singularität, da $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 0$.

2.7.2. **Satz** (Riemannscher Hebbarkeitssatz). *Eine isolierte Singularität z_0 einer Funktion $f \in \mathcal{O}(D)$ ist genau dann hebbar, wenn es eine Umgebung U von z_0 gibt, so dass f in $U \setminus \{z_0\}$ beschränkt ist.*

Beweis: Betrachte $g, h : D \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$

$$g(z) = \begin{cases} (z-z_0)f(z) & , \quad z \neq z_0 \\ 0 & , \quad z = z_0\ , \end{cases}$$
$$h(z) = (z-z_0)g(z)\ .$$

g ist nach Annahme stetig in z_0. Daher gilt

$$\lim_{z\to z_0} \frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} g(z) = 0$$

und h ist $\mathbb{C}$–diffbar, also holomorph mit $h(0) = h'(0) = 0$.
Nach dem Potenzreihenentwicklungssatz $\exists\, r > 0 : \forall\, z \in B_r(z_0)$

$$h(z) = (z-z_0)^2 \underbrace{(a_2 + a_3(z-z_0) + \ldots)}_{=:\tilde{f}(z)} = (z-z_0)^2 \tilde{f}(z)$$

mit $\tilde{f} \in \mathcal{O}(B_r(z_0))$. Für $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ gilt $h(z) = (z-z_0)g(z) = (z-z_0)^2 f(z)$, also $\tilde{f}(z) = f(z)$. Setze

$$\tilde{\tilde{f}} : D \cup \{z_0\} \to \mathbb{C},\ \tilde{\tilde{f}}(z) = \begin{cases} f(z) & , \quad z \in D \\ \tilde{f}(z) & , \quad z \in B_r(z_0)\ . \end{cases}$$

$\tilde{\tilde{f}}$ ist wohldefiniert und $\mathbb{C}$–diffbar in $D \cup \{z_0\}$ mit $\tilde{\tilde{f}}|_D = f$. $\square$

2.7.3. **Definition.** Sei $f \in \mathcal{O}(D)$, $z_0 \in D$. Die ***Ordnung von*** f ***in*** z_0 ist

$$\mathrm{ord}_{z_0}(f) = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}_0 : f^{(n)}(z_0) \neq 0\},\ f \not\equiv 0 \text{ in einer Umgebung von } z_0, \\ \infty, \quad f \equiv 0 \text{ in einer Umgebung von } z_0. \end{cases}$$

(Nach dem Identitätssatz gibt es $n \in \mathbb{N}_0$ mit $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ falls $f \not\equiv 0$ in einer Umgebung von z_0.)

Beispiele: $f(z) \neq 0 \iff \mathrm{ord}_z(f) = 0$; $\mathrm{ord}_{z_0}(z-z_0)^n = n$;
$\mathrm{ord}_w(z-z_0)^n = 0$, $w \neq z_0$.

2.7.4. **Satz.** *Sei* $f \in \mathcal{O}(D)$, $z_0 \in D$, $m = \operatorname{ord}_{z_0}(f)$. *Dann gibt es* $g \in \mathcal{O}(D)$, *so dass* $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, $z \in D$ *und* $g(z_0) \neq 0$.

Beweis : Die Taylorentwicklung von f um z_0 lautet

$$f(z) = a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \ldots = (z - z_0)^m(a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \ldots) ,$$

wobei $a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$. Daher ist

$$g : D \to \mathbb{C} \quad , \quad g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-z_0)^m} & , \quad z \neq z_0 \\ a_m & , \quad z = z_0 \end{cases}$$

holomorph in D: g ist komplex diffbar in z_0, da $g(z) = a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \ldots$ in einer Umgebung von z_0. □

Sei nun $f \in \mathcal{O}(D), z_0$ ein Pol von f, d.h. z_0 ist nicht hebbar und

$$f = g/(z - z_0)^p \quad , \quad g \in \mathcal{O}(D \cup \{z_0\}) \quad , \quad p \in \mathbb{N} .$$

Sei $q = \operatorname{ord}_{z_0}(g)$ und $g(z) = h(z)(z - z_0)^q$, $h \in \mathcal{O}(D \cup \{z_0\})$, $h(z_0) \neq 0$. Dann gilt:

$$f(z) = \frac{h(z)(z - z_0)^q}{(z - z_0)^p} = \frac{h(z)}{(z - z_0)^{p-q}} \ , \ z \in D.$$

Es ist $p > q$, ansonsten wäre z_0 hebbar; f hat also die Darstellung

$$f = \frac{h}{(z - z_0)^r} \ , \quad h(z_0) \neq 0, \tag{2.13}$$

wobei $r = p - q > 0$.

2.7.5. **Definition.** Sei $f \in \mathcal{O}(D), z_0$ ein Pol von f. Die Zahl $r > 0$ aus der Darstellung (2.13) heißt die ***Ordnung des Pols*** z_0 ***von*** f. Die Zahl $\operatorname{ord}_{z_0} f = -r$ heißt die ***Ordnung der Funktion*** f ***in*** z_0.