12. VORLESUNG, 28.05.2009

2.7.6. **Satz.** *Eine isolierte Singularität z_0 von $f \in \mathcal{O}(D)$ ist ein Pol genau dann, wenn* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Beweis :

$$(*) \qquad \lim_{z\to z_0} f(z) = \infty :\iff \forall M > 0\, \exists r > 0\, \forall z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\} : |f(z)| > M\ .$$

Sei $r > 0$, so dass $B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset D$ und $|f(z)| > 1$, $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Betrachte

$$h : B_r(z_0) \to \mathbb{C} \quad , \quad h(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(z)} & , \quad z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \\ 0 & , \quad z = z_0 \end{cases}$$

$(*) \;\Rightarrow\; \lim\limits_{z\to z_0} h(z) = 0 = h(z_0)$, also ist h stetig und holomorph in $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Nach dem Hebbarkeitssatz ist h holomorph in $B_r(z_0)$.
Sei $p = \operatorname{ord}_{z_0}(h)$. Es gilt $h(z) = (z - z_0)^p k(z)$ mit $k \in \mathcal{O}(B_r(z_0))$, $k(z_0) \neq 0$. Für $z \neq z_0$ ist $k(z) = h(z)(z - z_0)^{-p} \neq 0$. Schließlich gilt $\frac{1}{f(z)} = h(z) = (z - z_0)^p k(z)$, $f(z) = \frac{1}{k(z)} \frac{1}{(z-z_0)^p}$, wobei $\frac{1}{k} \in \mathcal{O}(B_r(z_0))$. □

2.7.7. **Satz** (Satz von Casorati-Weierstrass). *Sei $f \in \mathcal{O}(D)$ und z_0 eine isolierte Singularität von f. Äquivalent:*

(i) *z_0 ist eine wesentliche Singularität.*
(ii) *Für jede Umgebung U von z_0 mit $U \setminus \{z_0\} \subset D$ liegt $f(U \setminus \{z_0\})$ dicht in $\mathbb{C}$.*
(iii) *Es gibt eine Folge (z_n) in D mit $z_n \to z_0$, so dass $f(z_n)$ keinen Grenzwert in $\overline{\mathbb{C}}$ hat.*

Beweis :
Angenommen, es gäbe U, so dass $f(U \setminus \{z_0\})$ nicht dicht in $\mathbb{C}$ liegt. Dann gibt es $B_r(a)$, $r > 0$, mit $f(U \setminus \{z_0\}) \cap B_r(a) = \emptyset$. Definiere

$$g : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C} \quad , \quad g(z) = \frac{1}{f(z) - a}\ .$$

g ist holomorph und $|g(z)| = \frac{1}{|f(z)-a|} < \frac{1}{r}$.
Hebbarkeitssatz $\Rightarrow$ g ist holomorph fortsetzbar nach U. Es ist $f(z) = a + \frac{1}{g(z)}$, also

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \begin{cases} a + \frac{1}{g(z_0)} & , \quad \text{falls } g(z_0) \neq 0 \\ \infty & , \quad \text{falls } g(z_0) = 0\ . \end{cases}$$

f hat also entweder eine hebbare Singularität (wenn $g(z_0) \neq 0$) oder einen Pol (wenn $g(z_0) = 0$). Widerspruch. □

2.7.8. **Satz** (Großer Satz von Picard). *Seien $f \in \mathcal{O}(D)$ und z_0 eine isolierte Singularität von f. Dann sind für jede Umgebung U von z_0 nur zwei Fälle möglich:*

(i) $f(U \setminus \{z_0\}) = \mathbb{C}$ *oder*
(ii) $f(U \setminus \{z_0\}) = \mathbb{C} \setminus \{\textit{Punkt}\}$.

2.7.9. **Definition.** Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Eine ***meromorphe Funktion*** auf D ist eine Funktion $f : D' \to \mathbb{C}$, so dass

(i) $D' \subset \mathbb{C}$ offen ist und $P(f) := D \setminus D'$ diskret ist,
(ii) $f \in \mathcal{O}(D')$ und f einen Pol in jedem Punkt von $P(f)$ hat.

Wenn $P(f)$ leer ist, so ist $f \in \mathcal{O}(D)$; jede holomorphe Funktion ist also meromorph. Die Menge der meromorphen Funktionen in D wird mit $\mathcal{M}(D)$ bezeichnet. Die ***Ordnung der meromorphen Funktion*** f in einem Punkt $z \in D'$ des Definitionsbereichs ist definiert wie in Definition 2.7.3 und in einem Pol $z \in P(f)$ wie in Definition 2.7.5.

Beachte: Eine meromorphe Funktion auf D ist keine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$! Für $z \in P(f)$ gilt $\lim\limits_{w \to z} f(w) = \infty$. Wir können deshalb die Funktion $\tilde{f} : D \to \overline{\mathbb{C}}$,

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & , \quad z \in D' \\ \infty & , \quad z \in P(f) \end{cases}$$

betrachten; $\tilde{f}$ ist die stetige Fortsetzung von $f : D' \to \overline{\mathbb{C}}$ in $P(f)$. Wir identifizieren f mit $\tilde{f}$. Eine Umformulierung der Def. 2.7.9 ist also:

$$f \text{ meromorph auf } D :\Longleftrightarrow \begin{cases} f : D \to \mathbb{C} \text{ stetig} \\ P(f) = f^{-1}(\infty) \text{ abgeschlossen und diskret} \\ f \in \mathcal{O}(D \setminus P(f)) \end{cases}$$

Kurz gesagt: f heißt meromorph in D, wenn sie dort bis auf eine abgeschlossene diskrete Menge von Polen holomorph ist.

2.7.10. **Beispiel.**

(1) Rationale Funktionen $R = \frac{P}{Q}$, $P, Q \in \mathbb{C}[z]$, sind meromorph in $\mathbb{C}$. Nach Kürzen der gemeinsamen Linearfaktoren von P und Q können wir annehmen, dass P, Q teilerfremd sind. Dann ist $R \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus N(Q))$ wobei $N(Q) = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0\}$ und R hat Pole in $N(Q)$.

(2) Sind $f, g \in \mathcal{O}(D)$, D Gebiet; $g \not\equiv 0$. Dann $\frac{f}{g} \in \mathcal{M}(D)$.

Beweis:

Sei $N(g) = \{z \in D : g(z) = 0\}$. Aus dem Identitätssatz folgt, dass $N(g)$ keinen Häufungspunkt in D hat, also $N(g)$ ist abgeschlossen und diskret. Sei

$$N = \{z \in N(g) : \mathrm{ord}_z(f) \geqslant \mathrm{ord}_z(g)\}.$$

Dann sind die Punkte in N hebbare Singularitäten von f/g und werden zum Definitionsbereich hinzugenommen. An den Punkten von $N(g) \setminus N =: P\big(f/g\big)$ hat f/g Pole. Da $P(f)$ als Teilmenge von $N(g)$ keine Häufungspunkte hat, ist $f \in \mathcal{M}(D)$.

$$\frac{f}{g} : D \to \overline{\mathbb{C}} \quad , \quad \left(\frac{f}{g}\right)(z) = \begin{cases} \frac{f^{(k)}(z)}{g^{(k)}(z)} & , \quad \mathrm{ord}_z f = \mathrm{ord}_z g = k \\ 0 & , \quad \mathrm{ord}_z f > \mathrm{ord}_z g \\ \infty & , \quad \mathrm{ord}_z f < \mathrm{ord}_z g \,. \end{cases}$$

Die Funktion $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ ist meromorph auf $\mathbb{C}$ (mit Polen in $\pi(\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$) aber nicht rational.

(3) $\exp\left(\frac{1}{z}\right)$ ist keine meromorphe Funktion, da $z = 0$ kein Pol ist.

2.7.11. **Satz.** *$\mathcal{M}(D)$ ist ein Ring bezüglich Addition und Multiplikation der Funktionen. Ist D ein Gebiet, so ist $\mathcal{M}(D)$ ein Körper.*

Beachte: Ist D kein Gebiet, so ist

$$f : D \to \mathbb{C} \quad , \quad f(z) = \begin{cases} 1 & , \quad z \in D_1 \\ 0 & , \quad z \in D \setminus D_1 \end{cases}$$

(wobei D_1 eine Komponente von D ist) holomorph, aber $P\big(\frac{1}{f}\big) = D \setminus D_1$ ist offen, also nicht diskret, und $\frac{1}{f}$ definiert keine meromorphe Funktion.
Wir wollen nun holomorphe und meromorphe Funktionen in $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ betrachten.

2.7.12. **Definition.** Sei $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ offen mit $\infty \in D$ und $r > 0$ mit $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \subset D$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt *holomorph* in D, falls:

(i) f ist stetig in D.
(ii) f ist holomorph in $D \setminus \{\infty\}$.

Eine Funktion $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ heißt *meromorph* in D, falls:

(i) f ist stetig in D.
(ii) $P(f) := f^{-1}(\infty)$ ist abgeschlossen und diskret.
(iii) $f \in \mathcal{O}(D \setminus P(f))$.

2.7.13. **Beispiel.**
(1)

$$f : \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \quad , \quad f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z^m} & , \quad z \neq \infty \quad (m \in \mathbb{N}) \\ 0 & , \quad z = \infty \end{cases}$$

ist holomorph.
(2)

$$P : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}},\ P(z) = \begin{cases} z^m & , \quad z \neq \infty \quad (m \in \mathbb{N}) \\ \infty & , \quad z = \infty \end{cases}$$

ist meromorph mit einem Pol in ∞.
(3) Seien $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ mit P, Q teilerfremd. Die rationale Funktion

$$R(z) = \begin{cases} \frac{P(z)}{Q(z)} & , \quad z \in \mathbb{C},\ Q(z) \neq 0 \\ \infty & , \quad z \in \mathbb{C},\ Q(z) = 0 \\ \lim\limits_{z \to \infty} \frac{P(z)}{Q(z)} & , \quad z = \infty \end{cases}$$

ist meromorph.

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, so dass $D \cup \{\infty\}$ eine Umgebung von ∞ ist und sei $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$. Wir nehmen an, dass es ein $r > 0$ existiert mit f holomorph in $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$. Betrachte die holomorphe Funktion $g : B_{1/r}(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$. Dann gilt:
$f : D \to \mathbb{C}$ holomorph $\iff$ $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{\infty\})$ und g hat eine hebbare Singularität in 0 mit $g(0) = f(\infty)$.
$f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorph $\iff$ $f \in \mathcal{M}(D \setminus \{\infty\})$ und g hat einen Pol in 0.

2.7.14. **Definition.** Wir sagen, dass $f \in \mathcal{M}(D)$ eine ***Nullstelle (Pol) von Ordung*** p ***in*** ∞ hat, wenn dies für g in 0 der Fall ist. Wir sagen, dass f ***in*** ∞ ***eine wesentliche Singularität*** hat, wenn dies für g in 0 der Fall ist.

Beispiele.
(1) Ein Polynom vom Grad $m \geqslant 1$, $P : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ hat einen Pol der Ordnung m in ∞.
(2) $\mathbb{C} \ni z \mapsto e^z \in \mathbb{C}$ hat eine wesentliche Singularität in ∞.
(3) $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{C}}$, $z \mapsto z^p e^{\frac{1}{z}}$ hat in 0 eine wesentliche Singularität und in ∞ einen Pol der Ordnung $p \in \mathbb{N}$.
Kurz gefasst: Definitionsgemäß hat $f(z)$ das gleiche Verhalten in ∞ wie $f\left(\frac{1}{z}\right)$ in 0.

2.8. **Laurentreihen und Laurententwicklungen.**

Eine holomorphe Funktion $f : B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ mit isolierter Singularität lässt sich im Allgemeinen nicht in eine Taylorreihe entwickeln, aber in eine sogenannte Laurentreihe.

Beispiele.

(1) Hat f eine hebbare Singularität in z_0, so gilt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \text{ in } B_r(z_0) \quad \text{(das ist wohl eine Taylorreihe).}$$

(2) Hat f einen Pol, so gilt $f = \dfrac{h}{(z-z_0)^p}$ mit $h(z_0) \neq 0$, also

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z-z_0)^n}{(z-z_0)^p} \\ &= \frac{a_0}{(z-z_0)^p} + \frac{a_1}{(z-z_0)^{p-1}} + \ldots + \frac{a_{p-1}}{(z-z_0)} + a_p + a_{p+1}(z-z_0) + \ldots\ , \end{aligned}$$

mit $a_0 \neq 0$.

(3)

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} \quad , \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\ .$$

2.8.1. **Definition.** Eine ***Laurentreihe*** ist ein Paar von Reihen

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n},\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \right),$$

wobei $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$. Wir schreiben dafür $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ heißt ***Hauptteil***, die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ***Nebenteil*** der Laurentreihe. Diese heißt *konvergent in* $z \in \mathbb{C}$ *(bzw. absolut konvergent, gleichmäßig oder normal konvergent in einer Menge)*, wenn dies für den Hauptteil und Nebenteil der Fall ist. Der Grenzwert ist die Summe der entsprechenden Grenzwerte:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n := \sum_{n=-1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\ .$$

2.8.2. **Satz.** *Ist die Potenzreihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n$ *auf* $B_{1/r}(0)$ *und die Potenzreihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ *auf* $B_R(0)$ *konvergent, dann konvergiert die Laurentreihe* $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *absolut auf dem Ringgebiet* $K_{r,R}(z_0) = \{z : r < |z-z_0| < R\}$ *und normal (also gleichmäßig) auf jedem Ringgebiet* $\overline{K}_{\varrho,\sigma} = \{z : \varrho \leqslant |z-z_0| \leqslant \sigma\}$*, wobei* $r < \varrho < \sigma < R$.

Die Summe der Laurentreihe $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *ist holomorph in* $K_{r,R}(z_0)$.