13. VORLESUNG, 08.06.2009

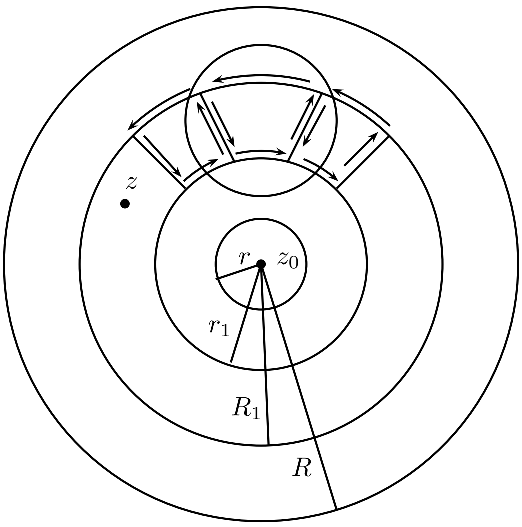
2.8.3. **Satz** (Cauchyscher Integralsatz für Ringgebiete).
Sei g holomorph im Ringgebiet

$$K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\} \quad (0 \le r < R \le +\infty\,,\ z_0 \in \mathbb{C})\ . \tag{2.14}$$

Dann gilt für alle $r < r_1 < R_1 < R$

$$\int\limits_{|\zeta - z_0| = r_1} g(\zeta)\, d\zeta \;=\; \int\limits_{|\zeta - z_0| = R_1} g(\zeta)\, d\zeta\ . \tag{2.15}$$

Beweis :
Wir führen geschlossene Kurven wie in Figur ein, die in Sterngebieten (eigentlich Kreisscheiben) verlaufen. Auf diese Kurven wenden wir den Cauchyschen Integralsatz an. Durch Addition der Integrale erhalten wir (2.15)



□

2.8.4. **Satz** (Cauchysche Integralformel für Ringgebiete). *Sei f holomorph im Ringgebiet* (2.14). *Dann gilt für alle $z \in K_{r_1,R_1}(z_0)$ mit $r < r_1 < R_1 < R$:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = R_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \;-\; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}\ . \tag{2.16}$$

Beweis :
OBdA $z_0 = 0$. Seien z, r_1, R_1 wie oben fest. Wir wenden (2.15) für die holomorphe Funktion an:

$$g : K_{r,R}(0) \to \mathbb{C} \quad , \quad g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & , \quad \zeta \neq z \\ f'(z) & , \quad \zeta = z\ . \end{cases}$$

Es ist

$$\int\limits_{|\zeta|=R_1} g(\zeta)\,d\zeta = \int\limits_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - f(z) \underbrace{\int\limits_{|\zeta|=R_1} \frac{d\zeta}{\zeta - z}}_{2\pi i \text{ da } |z|<R_1} = \int\limits_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - 2\pi i\, f(z)\;,$$

$$\int\limits_{|\zeta|=r_1} g(\zeta)d\zeta = \int_{|\zeta|=r_1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - f(z) \underbrace{\int\limits_{|\zeta|=R_1} \frac{d\zeta}{\zeta - z}}_{0 \text{ da } |z|>r_1} = \int\limits_{|\zeta|=r_1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}\;.$$

□

2.8.5. **Laurententwicklung.** Sei f holomorph in einem Ringgebiet (2.14). Dann hat f eine Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\;,\; z \in K_{r,R}(z_0)\;. \tag{2.17}$$

Dabei sind a_n, $n \in \mathbb{Z}$ eindeutig bestimmt durch

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0|=\varrho} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\;,\;\; r < \varrho < R\;. \tag{2.18}$$

Beweis :
OBdA $z_0 = 0$. Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r_1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} &= -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r_1} \frac{f(\zeta)d\zeta}{z\left(1 - \frac{\zeta}{z}\right)} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^n f(\zeta)\,d\zeta \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r_1} f(\zeta)\zeta^n\,d\zeta \right) z^{-(n+1)} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} \quad , \quad a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r_1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{-n+1}}\;.
\end{aligned}$$

Wegen $|\zeta| = r_1 < |z|$ konvergiert die Reihe gleichmäßig auf $\{|\zeta| = r_1\}$ und die gliedweise Integration ist erlaubt.
Wie im Potenzreihenentwicklungssatz erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad , \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{n+1}}$$

Aus (2.14) erhalten wir (2.17). Allerdings haben wir in (2.18) nun $\varrho = r$ bzw. $\varrho = R_1$.
Den allgemeinen Fall erhalten wir wegen (2.15) für $g(\zeta) = \dfrac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}$:
Für alle $r < \varrho < \sigma < R$ gilt

$$\int\limits_{|\zeta|=\varrho} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{n+1}} = \int\limits_{|\zeta|=\sigma} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{n+1}} \quad , \quad n \in \mathbb{Z}\;.$$

□

2.8.6. **Laurentzerlegung.** Sei f holomorph in (2.14). Dann existieren eindeutig bestimmte holomorphe Funktionen $g : B_R(0) \to \mathbb{C}$, $h : B_{\frac{1}{r}}(0) \to \mathbb{C}$, so dass

$$f(z) = g(z - z_0) + h\left(\frac{1}{z - z_0}\right), \; z \in K_{r,R}(z_0) \text{ und } h(0) = 0\,.$$

Beweis :

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \quad , \quad h(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$$

Eindeutigkeit: Übung. □

2.8.7. **Satz** (Klassifizierung der isolierten Singularitäten).

Sei z_0 eine isolierte Singularität der Funktion f und sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ die Laurententwicklung von f in einem Kreisring $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Die Singularität ist:

(a) *hebbar* $\iff$ $a_n = 0$ *für alle* $n < 0$.
(b) *Pol der Ordnung* m $\iff$ $a_n = 0$ *für alle* $n < -m,\ a_{-m} \neq 0$.
(c) *wesentlich* $\iff$ $a_n \neq 0$ *für unendlich viele* $n < 0$.

Beweis : Übung. □

2.9. **Folgen holomorpher Funktionen.**

2.9.1. **Definition.** Sei D eine offene Menge, $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Wir sagen, dass (f_n) lokal gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert, wenn es zu jedem $a \in D$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f_n \to f$, $n \to \infty$ gleichmäßig in $B_\delta(a)$.

2.9.2. **Satz.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Genau dann gilt $f_n \to f$, $n \to \infty$ lokal gleichmäßig in D, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subset D$ gilt $f_n \to f$, $n \to \infty$ gleichmäßig in K.*

2.9.3. **Beispiel.** Sei $f_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $f_n(z) = z^n$. Dann $f_n \to 0$, $n \to \infty$ wegen $|f_n(z)| \le r^n$ für $|z| \le r$ und $r^n \to 0$, $n \to \infty$ für $r < 1$. Aber f_n konvergiert nicht gleichmäßig gegen 0, da $\|f_n\|_{\mathbb{D}} = \sup_{\mathbb{D}} |f_n| = 1$. Also ist die lokal gleichmäßige Konvergenz eine schwächere Forderung als die gleichmäßige Konvergenz.

2.9.4. **Satz** (Satz von Weierstrass). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f_n \in \mathcal{O}(D)$ und $f_n \to f$, $n \to \infty$, lokal gleichmäßig in D. Dann ist $f \in \mathcal{O}(D)$ und für die Ableitungen hat man auch $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$, $n \to \infty$, lokal gleichmäßig für alle $k \in \mathbb{N}$.*

Beweis : Zu $z_0 \in D$ wählen wir $r > 0$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subset D$, also

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f_n(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad \text{für } z \in B_r(z_0) \qquad \text{(Cauchy Integralformel)}\ .$$

Für $z \in B_r(z_0)$ fest, $\frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} \to \frac{f(z)}{\zeta - z}$, $n \to \infty$, gleichmäßig auf $\partial B_r(z_0)$, können wir Integral und Grenzwert vertauschen und erhalten

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad , \quad z \in B_r(z_0)\,.$$

Daraus folgt, dass f holomorph ist (siehe z.B. 2.3.9). Sei nun $K \subset D$ kompakt, $0 < r < d(K, \partial D)$, $K(r) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, K) \le r\}$. Nach Satz 2.5.1 (Cauchysche Abschätzungen) gilt: $\|f_n^{(k)} - f^{(k)}\|_K \le \frac{k!}{r^k} \|f_n - f\| \to 0\,,\ n \to \infty$. □