14. Vorlesung, 15.06.2009

2.9.5. **Satz.** *Seien $g_n \in \mathcal{O}(D)$ holomorph und die Reihe $\sum_{n\geq 0} g_n$ konvergiere lokal gleichmäßig in D. Dann ist $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z)$, holomorph und für $k \in \mathbb{N}$ gilt $f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(k)}(z)$ für $z \in D$.*

2.9.6. **Definition.** Seien $g_n : D \to \mathbb{C}$. Dann ***konvergiert*** $\sum_{n\geq 0} g_n$ ***lokal normal***, wenn für jedes $a \in D$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_{B_\delta(a)} < \infty$.
Dann konvergiert $\sum_{n\geq 0} g_n$ auch lokal gleichmäßig.

2.9.7. **Satz.** *Die Reihe $\sum_{n\geq 0} g_n$, $g_n \in \mathcal{O}(D)$, konvergiere lokal normal in D. Dann ist $f = \sum_{n=0}^{\infty} g_n$ ebenfalls holomorph.*

Beispiel. Die *Riemannsche ζ–Funktion* ist definiert durch

$$\zeta : \{\operatorname{Re} s > 1\} \to \mathbb{C} \quad , \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \ .$$

Die Reihe konvergiert normal in jeder Halbebene $\{\operatorname{Re} z \geq 1 + \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$.
ζ ist somit holomorph.

Sei f meromorph in G und $a \in G$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$, eine Umgebung $U \subset G$ von a und eine holomorphe Funktion h in U mit

$$f(z) = (z-a)^n \cdot h(z) \quad \text{und} \quad h(a) \neq 0 \ .$$

h erhählt man, wenn man die Laurent–Entwicklung von f um a betrachtet:

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-a)^k = (z-a)^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_{n-k}(z-a)^k = (z-a)^n \cdot h(z) \ .$$

Es gilt $h(a) = a_n \neq 0$ und $n = \operatorname{ord}_a f$. Weiter erhält man

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{h'(z)}{h(z)} \ .$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ klein genug, dass $h(z) \neq 0$ in $B_{2\varepsilon}(a)$. Dann folgt

$$\int\limits_{\partial B_\varepsilon(a)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \int\limits_{\partial B_\varepsilon(a)} \frac{n}{z-a}\, dz + \int\limits_{\partial B_\varepsilon(a)} \frac{h'(z)}{h(z)}\, dz = 2\pi i \cdot n \ .$$

3. Die allgemeine Cauchy–Theorie

Der Integralsatz und die Integralformel wurden für Sterngebiete bewiesen.
Frage: Sei D ein beliebiges Gebiet. Für welche Kurven $\gamma \subset D$ gilt

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0 \quad \forall\, f \in \mathcal{O}(D) \ ?$$

Antwort: Es sind genau die geschlossenen Kurven, deren Inneres in D liegt.

3.1. **Homologieversion der Cauchyschen Sätze.**

Für eine geschlossene Kurve γ und $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ wurde die Windungszahl definiert durch

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \ .$$

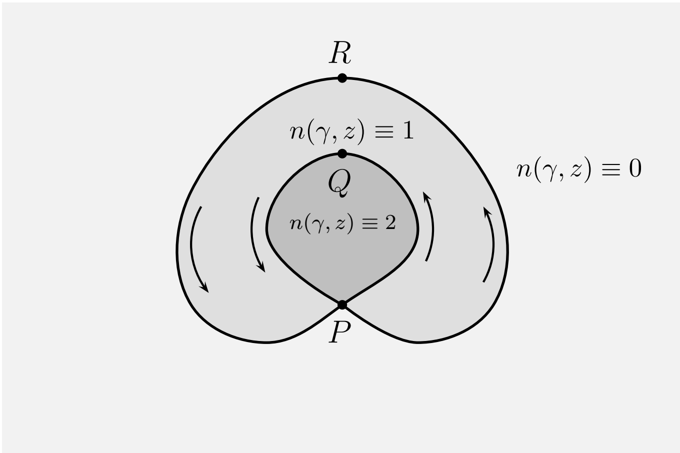
3.1.1. **Satz** (Eigenschaften der Windungszahl)**.**

(i) $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$ *für* $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$.

(ii) $\mathbb{C} \setminus |\gamma| \ni z \mapsto n(\gamma, z)$ *ist lokal–konstant.*

(iii) $n(\gamma, z) = 0$ *für* z *in der unbeschränkten Komponente von* $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$.

Als Beispiel betrachte die Kurve $PQPRP$:



3.1.2. **Definition.** Ist γ eine geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$, so heißen

$$\operatorname{Int} \gamma = \{z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma| \ : \ n(\gamma, z) \neq 0\} \quad \text{das } \textbf{\textit{Innere}} \text{ von } \gamma \text{ und}$$

$$\operatorname{Ext} \gamma = \{z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma| \ : \ n(\gamma, z) = 0\} \quad \text{das } \textbf{\textit{Äußere}} \text{ von } \gamma \ .$$

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Dann heißt γ ***nullhomolog in*** D, wenn $\operatorname{Int} \gamma \subset D$.

Bemerkung. γ ist nullhomolog in D, wenn es keinen Punkt des Komplements von D umläuft.

$$\operatorname{Int} \gamma \subset D \iff \big(n(\gamma, z) \neq 0 \Rightarrow z \in D\big) \iff \big(z \notin D \Rightarrow n(\gamma, z) = 0\big)$$

3.1.3. **Lemma.**

(i) *Sei* γ *eine stückweise* $\mathscr{C}^1$*–Kurve und* $\varphi : |\gamma| \to \mathbb{C}$ *stetig. Dann ist*

$$F : \mathbb{C} \setminus |\gamma| \to \mathbb{C} \quad , \quad F(z) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$$

holomorph.

(ii) *Sei* D *ein Gebiet. Sei* $g : D \times D \to \mathbb{C}$ *stetig und* $g(\zeta, z)$ *holomorph in* z *für jedes* $\zeta \in D$*. Dann ist*

$$G(z) = \int_{\gamma} g(\zeta, z) \, d\zeta$$

holomorph.

Beweis: (i) Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ fest. Dann gilt

$$F(z) - F(z_0) = \int_\gamma \frac{(z-z_0)\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}\, d\zeta \quad \text{und daher}$$

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}\, d\zeta = \int_\gamma \frac{(z-z_0)\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^2}\, d\zeta \ .$$

Sei $r = d(z_0, \gamma) > 0$. Für $|z - z_0| \leq r/2$ gilt $|\zeta - z| \geq r/2$ für $\zeta \in |\gamma|$. Die Standardabschätzung für Integrale liefert

$$\left| \int_\gamma \frac{(z-z_0)\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^2}\, d\zeta \right| \leq \frac{2|z-z_0|}{r^3} \cdot \max_\gamma |\varphi| \cdot \ell(\gamma) \ ,$$

und für $z \to z_0$ strebt dies gegen 0. Also existiert $F'(z_0)$ und hat den behaupteten Wert. Somit ist F holomorph.

(ii) Zu zeigen (Morera): Für jedes Dreieck $\Delta \subset\subset D$ gilt $\int_{\partial\Delta} G(z)\, dz = 0$.

$$\int_{\partial\Delta} G(z)\, dz = \int_{\partial\Delta} \int_\gamma g(\zeta, z)\, d\zeta\, dz = \int_\gamma \int_{\partial\Delta} g(\zeta, z)\, dz\, d\zeta = 0 \ ,$$

denn das innere Integral verschwindet (Goursat), da $g(\zeta, z)$ holomorph in z ist. □

3.1.4. **Satz.** *Sei D ein Gebiet und γ eine geschlossene Kurve in D. Dann sind äquivalent:*

(i)

$$f \in \mathcal{O}(D) \quad \Rightarrow \quad \int_\gamma f(z)\, dz = 0 \quad ;$$

(ii)

$$f \in \mathcal{O}(D) \quad \Rightarrow \quad n(\gamma, z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad , \quad z \in D \setminus |\gamma| \quad ;$$

(iii) $\operatorname{Int} \gamma \subset D$, *d.h.* γ *ist nullhomolog in* D.

Beweis:

(i)⇒(ii):

Sei $g(\zeta) = \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}$, $\zeta \in D \setminus \{z\}$, und $g(z) = f'(z)$. Dann ist g holomorph in D und

$$0 = \int_\gamma g(\zeta)\, d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - 2\pi i \cdot f(z) \cdot n(\gamma, z) \ , \ z \in D \setminus |\gamma| \ .$$

(ii)⇒(i):

Sei $f \in \mathcal{O}(D)$ und $z \in D \setminus |\gamma|$. Dann ist $h(\zeta) = (\zeta - z) \cdot f(\zeta) \in \mathcal{O}(D)$ mit $h(z) = 0$. Somit

$$0 = n(\gamma, z) \cdot h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta \ .$$

(i)⇒(iii):

Sei $z \notin D$. Dann gilt

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0 \ , \quad \text{da} \quad f(\zeta) = \frac{1}{\zeta - z} \in \mathcal{O}(D) \ , \quad \text{wenn } z \notin D \ .$$

(iii)⇒(ii):

Sei $f \in \mathcal{O}(D)$. Zeige: $\quad \operatorname{Int}\gamma \subset D \quad \Rightarrow \quad \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0 \quad .$

Definiere $g : D \times D \to \mathbb{C}$,

$$g(\zeta, z) := \begin{cases} \dfrac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & , \quad \zeta \neq z \\ f'(z) & , \quad \zeta = z\ . \end{cases}$$

Dann ist zu zeigen, dass

(1) g stetig ist und $g(\zeta, z)$ holomorph in z.
(2) Dann folgt mit Lemma 3.1.3(ii), dass $G(z) = \int_\gamma g(\zeta, z)\, d\zeta$ holomorph ist.
(3) $G = F|_D$ ist Einschränkung einer ganzen Funktion $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
(4) F ist beschränkt und sogar $F(z) \to 0$ für $z \to \infty$.
Dann folgt (Liouville) $F \equiv 0$.

Zu (1), $g(\zeta, z)$ ist holomorph in z und in ζ.
Für die Stetigkeit auf der Diagonalen sei $(z_0, z_0) \in D \times D$. Für $(\zeta, z) \in B_\delta(z_0) \times B_\delta(z_0)$ betrachte

$$g(\zeta, z) - g(z_0, z_0) = \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} - f'(z_0) = \frac{1}{\zeta - z} \int\limits_{[\zeta, z]} \big(f'(w) - f'(z_0)\big)\, dw\ .$$

Nun ist f' stetig. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ so, dass $|f'(w) - f'(z_0)| < \varepsilon$ in $B_\delta(z_0)$.
Somit gilt auch (2).
Für (3) setze

$$F(z) = \begin{cases} G(z) & , \quad z \in D \\ H(z) & , \quad z \in \operatorname{Ext}\gamma\ , \end{cases}$$

wobei $H(z) := \displaystyle\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ holomorph ist nach Lemma 3.1.3(i).
F ist wohldefiniert, da $G(z) = H(z)$ für $z \in D \cap \operatorname{Ext}\gamma$. Aus der Voraussetzung $\operatorname{Int}\gamma \subset D$ folgt nun $D \cup \operatorname{Ext}\gamma = \mathbb{C}$, d.h. F ist eine ganze Funktion.
Zu (4): Für $R > \max|\gamma|$ und $|z| > R$ gilt

$$|F(z)| = |H(z)| = \left| \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leq \ell(\gamma) \cdot \max_\gamma |f| \cdot \frac{1}{d(z, \gamma)} \longrightarrow 0 \quad (z \to \infty)\ .$$

$\square$