15. VORLESUNG, 18.06.2009

3.1.5. **Definition.**

(i) Sind $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ geschlossene Kurven, so nennt man die formale Summe $\Gamma := \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ einen ***Zyklus*** und $|\Gamma| := |\gamma_1| + \ldots \cup |\gamma_n|$ seinen Träger.
Ist $f : |\Gamma| \to \mathbb{C}$ stetig, dann definiert man

$$\int_\Gamma f(z)\,dz := \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz \quad \text{und} \quad n(\Gamma, z) := \sum_{j=1}^{n} n(\gamma_j, z)\ ,\ z \notin |\Gamma|\ .$$

(ii) Sei Γ ein Zyklus in einem Gebiet D. Dann heißt Γ ***nullhomolog in*** D, wenn $n(\Gamma, z) = 0$ für alle $z \notin D$.
Zwei Zykel Γ_1, Γ_2 heißen *homolog in* D, wenn $n(\Gamma_1, z) = n(\Gamma_2, z)\ \forall\, z \notin D$.

(iii) Ein Zyklus Γ in D heißt ***Randzyklus*** von (der offenen Menge) $V \subset\subset D$, wenn

$$\partial V = |\Gamma| \quad , \quad n(\Gamma, z) = 1 \quad \forall\, z \in V \quad , \quad n(\Gamma, z) = 0 \quad \forall\, z \notin \overline{V}\ .$$

Analog wird eine *Randkurve* γ definiert als einfach geschlossene Kurve, die V berandet.

3.1.6. **Satz** (Cauchy–Integralsatz/Formel für Zykel). *Sei f holomorph im Gebiet D und $\Gamma \subset D$ nullhomologer Zyklus in D. Dann gilt:*

(i) $$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0 \quad ,$$

(ii) $$n(\Gamma, z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\,, \quad z \in D \setminus |\Gamma| \quad .$$

3.2. **Residuensatz.**

3.2.1. **Definition.** Sei U offen und $a \in U$. Sei $f : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $r > 0$, so dass $\overline{B}_r(a) \subset U$. Dann heißt

$$\operatorname{res}_a f := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} f(z)\,dz$$

das ***Residuum*** von f in a.

Bemerkung.

(i) Ist $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n$ die Laurent–Reihe um b, dann ist $\operatorname{res}_b f = a_{-1}$.

(ii) Ist f holomorph in a, dann ist $\operatorname{res}_a f = 0$.

(iii) Sei $h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-b)^n$ ein Hauptteil um b und $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{b\}$ eine geschlossene Kurve. Dann ist $h : \mathbb{C} \setminus \{b\} \to \mathbb{C}$ holomorph und

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(z)\,dz = \frac{a_{-1}}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - b} = a_{-1} \cdot n(\gamma, b) = n(\gamma, b) \cdot \operatorname{res}_b h\ .$$

(iv) Ist a außerwesentliche Singularität von $f \not\equiv 0$, dann ist $\operatorname{ord}_a f = \operatorname{res}_a \left(\frac{f'}{f}\right)$.

3.2.2. **Satz** (Residuensatz). *Sei D ein Gebiet, $S \subset D$ eine diskrete Menge in D und $f : D \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei γ eine geschlossene Kurve in $D \setminus S$ mit $\operatorname{Int}\gamma \subset D$ (d.h. γ ist nullhomolog in D). Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{z\in\operatorname{Int}\gamma} n(\gamma,z)\cdot \operatorname{res}_z f\ .$$

Beweis :

$$\left.\begin{array}{rl} z\in D\setminus S & \Rightarrow\ \operatorname{res}_z f = 0 \\ \overline{\operatorname{Int}\gamma}\ \text{ist kompakt} & \Rightarrow\ \operatorname{Int}\gamma\cap S\ \text{ist endlich} \end{array}\right\}\quad \text{Summe rechts ist endlich}$$

Sei $S\cap\operatorname{Int}\gamma = \{b_1,\dots,b_n\}$. Seien

$$h_j(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(j)}(z-b_j)^n$$

die Hauptteile von f um b_j. Dann ist $f - \sum\limits_{j=1}^{n} h_j$ holomorph in einer Umgebung V von $\overline{\operatorname{Int}\gamma}$. Wegen $\operatorname{Int}\gamma \subset V$ folgt mit dem Cauchy–Integralsatz

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\gamma} h_j(z)\,dz \\ &= \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz - 2\pi i\sum_{j=1}^{n} n(\gamma,b_j)\cdot\operatorname{res}_{b_j} f\ . \end{aligned}$$

□

3.2.3. **Satz** (Residuensatz für Zykel). *Sei D ein Gebiet, $S \subset D$ eine diskrete Menge in D und $f : D\setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $\Gamma \subset D\setminus S$ nullhomologer Zyklus in D. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{z\in\operatorname{Int}\Gamma} n(\Gamma,z)\cdot \operatorname{res}_z f\ .$$

Ist Γ Randzyklus von $V \subset\subset D$, dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{z\in V}\operatorname{res}_z f\ .$$

3.2.4. **Definition.** Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist

$$\nu_f(a) := \operatorname{ord}_a(f - f(a))$$

die ***Vielfachheit***, mit der a auf $f(a)$ abgebildet wird.

Ist f konstant, dann $\nu_f(a) = \infty$. Ansonsten gibt es ein $n \geq 1$, so dass in der Nähe von a gilt $f(z) = f(a) + (z-a)^n g(z)$ mit g holomorph in a und $g(a) \neq 0$. Dann ist $\nu_f(a) = n$. Für $n = 1$ gilt $g(a) = f'(a)$.

Bemerkung.

(i) $\nu_f(a) \geq 1 \quad , \quad \nu_f(a) = 1 \iff f'(a) \neq 0\,.$

(ii) f nicht–konstant $\quad\rightsquigarrow\quad \nu_f(a) = \operatorname{res}_a\left(\frac{f'}{f-f(a)}\right).$

(iii) $N_f(w) = \sum\limits_{z\in f^{-1}(w)} \nu_f(z)$ ist die Anzahl der w–Stellen in G mit Vielfachheit.

Sei f holomorph in G und γ geschlossene Kurve in G. Sei $w \notin f(|\gamma|)$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)-w}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{f\circ\gamma}\frac{d\zeta}{\zeta-w} = n(f\circ\gamma, w)\ .$$

Aus dem Residuensatz folgt sofort

3.2.5. **Satz** (Argumentprinzip). *Sei G Gebiet und f holomorph in G. Seien $a_1, a_2, \ldots$ die paarweise verschiedenen w–Stellen von f und $\Gamma \subset G$ nullhomologer Zyklus in G mit $a_\mu \notin |\Gamma|$. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)-w}\,dz = \sum_{\mu} n(\Gamma, a_\mu)\cdot \nu_f(a_\mu)\ .$$

Ist Γ Randzyklus von $V \subset\subset G$, dann ist dies die Anzahl $N_f(w,V)$ der w–Stellen in V, d.h. $N_f(w,V) = N_f(w)\cap V$.

Bemerkung. Ist f meromorph mit den Polstellen $b_1, b_2, \ldots$, so gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)-w}\,dz = \sum_{\mu} n(\Gamma, a_\mu)\cdot \nu_f(a_\mu) + \sum_{\nu} n(\Gamma, b_\nu)\cdot \mathrm{ord}_{b_\nu} f\ .$$

Ist Γ Randzyklus, so muß man also noch die Anzahl der Polstellen $N_f(\infty, V)$ in V abziehen.

Beispiel. Sei $\gamma = \partial B_r(a)$ Randkurve einer Kreisscheibe und f holomorph in $B_{2r}(a)$, dann ist

$$N_f(w, B_r(a)) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)-w}\,dz = n(f\circ\gamma, w)\ ,$$

d.h. die Bildkurve läuft so oft um den Punkt w wie w–Stellen in $B_r(a)$ liegen.

3.2.6. **Satz** (Rouché). *Seien f, g holomorph in G und Γ Randzyklus von $V \subset\subset G$. Gilt $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ für alle $z \in |\Gamma|$, so haben f und g gleichviele Nullstellen in V (mit Vielfachheit).*

Beweis: Sei $h_\lambda = f + \lambda(g-f)$, $\lambda \in [0,1]$. Dann ist $h_0 = f$ und $h_1 = g$. Wegen

$$|\lambda(g(z) - f(z))| \le |g(z) - f(z)| < |f(z)| \quad \text{für } z \in |\Gamma|$$

ist $h_\lambda(z) \neq 0$ auf $|\Gamma|$. Somit ist die Anzahl der Nullstellen in V

$$N_\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{h'_\lambda(z)}{h_\lambda(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f'(z)+\lambda(g'(z)-f'(z))}{f(z)+\lambda(g(z)-f(z))}\,dz\ .$$

Nun hängt N_λ stetig von λ ab, und da $N_\lambda \in \mathbb{Z}$, folgt $N_0 = N_1$. □