16. VORLESUNG, 22.06.2009

Wir geben zwei Anwendungen des Satzes von Rouché. Es kommt darauf an, bei vorgegebener Funktion f eine Vergleichsfunktion g mit bekannter Nullstellenzahl so zu finden, dass die Ungleichung im Satz von Rouché erfüllt ist.

3.2.7. **Satz** (Fundamentalsatz der Algebra).
Ein nicht konstantes Polynom $P \in \mathbb{C}[z]$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Beweis :
O.b.d.A. sei $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$, $n \geq 1$.
Setze $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = P(z)$, $g(z) = z^n$. Für $r > 0$ hinreichend groß gilt

$$|f(w) - g(w)| = |a_{n-1}w^{n-1} + \ldots + a_0| < |w^h| = g(w) ,$$

da

$$\lim_{w \to \infty} \frac{a_{n-1}w^{n-1} + \ldots + a_0}{w^n} = 0 .$$

Also folgt: $N_f(0, B_r(0)) = N_g(0, B_r(0)) = n$, wobei $N_f(0, D) =$ Anzahl der Nullstellen von f in D. □

Einen anderen Beweis haben wir in 2.5.4 mit Hilfe des Satzes von Liouville gegeben.

3.2.8. **Satz** (Hurwitz I). *Eine Folge $f_n \in \mathcal{O}(D)$ konvergiere lokal gleichmäßig im Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ gegen $f \in \mathcal{O}(D)$, Es sei U beschränkt und offen mit $\overline{U} \subset D$, so dass f keine Nullstelle auf ∂U hat. Dann gibt es einen Index $m_U \in \mathbb{N}$, so dass alle Funktionen f, f_n mit $n \geq n_U$ in $\overline{U}$ gleich viele Nullstellen haben.*

Beweis :
Schritt 1: $U = B_r(z_0)$. Es gilt $\varepsilon = \min\{|f(z)| : z \in \partial U\} > 0$. $f_n \to f$ gleichmäßig auf $\partial U \Rightarrow \exists n_U$, so dass $\|f_n - f\|_{\partial U} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_U \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < |f(z)|$ für alle $z \in \partial U$, $n \geq n_U$. Rouché $\Rightarrow$ Behauptung.
Schritt 2: U beliebig. $\overline{U}$ kompakt $\Rightarrow$ f hat in $\overline{U}$ nur endlich viele Nullstellen (Identitätssatz). Sie liegen alle in $U = \overline{U} \setminus \partial U$, es gibt also paarweise disjunkte Kreisscheiben $U_1, \ldots, U_k$ in U, so dass f in $K = \overline{U} \setminus (U_1 \cup \ldots \cup U_k)$ nicht verschwindet. Da $f_n \to f$ gleichmäßig auf K, sind fast alle f_n Nullstellen-frei in K.
Schritt 1 $\Rightarrow$ für fast alle f_n gilt $N_{f_n}(0, U_j) = N_f(0, U_j)$ also $N_{f_n}(0, U) = N_f(0, U)$. □

3.2.9. **Satz** (Hurwitz II). *Es sei $f_n \in \mathcal{O}(D)$ eine Folge von injektiven Funktionen, die in D gleichmäßig gegen $f \in \mathcal{O}(D)$ konvergiert. Dann ist f entweder konstant oder injektiv.*

Beweis :
Angenommen f ist weder injektiv noch konstant. Seien $a, b \in D$ mit $a \neq b$, $f(a) = f(b)$. Sei $r > 0$ mit $B_r(a) \cap B_r(b) = \emptyset$. Die Funktion $f - f(a)$ hat Nullstellen in a und b und ist nicht identisch mit Null. Nach 3.2.8 haben fast alle Funktionen $f_n - f(a)$ fast gleich viele Nullstellen in $B_r(a)$ und $B_r(b)$, d.h. f_n nimmt den Wert $f(a)$ in zwei verschiedenen Stellen an. Widerspruch. □

3.3. **Anwendung des Residuensatzes auf die Berechnung von Integralen.** Zunächst betrachten wir *trigonometrische Integrale*.

3.3.1. **Satz.** *Sei $R = \frac{P}{Q}$ eine rationale Funktion. Q habe keine Nullstelle auf $|z| = 1$. Dann gilt*

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = 2\pi \sum_{w \in \mathbb{D}} \operatorname{res}_w \widetilde{R}$$

mit $\widetilde{R}(z) = \frac{1}{z}R\big(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})\big)$.

Beweis :
Sei $z \in S^1$, $z = e^{it} = \cos t + i \sin t$. Dann

$$\cos t = \frac{1}{2}(z+\overline{z}) = \frac{1}{2}\Big(z+\frac{1}{z}\Big) \quad , \quad \sin t = \frac{1}{2i}(z-\overline{z}) = \frac{1}{2i}\Big(z-\frac{1}{z}\Big) \,,$$

also

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = \int\limits_{\partial\mathbb{D}} R\left(\frac{1}{2}\Big(z+\frac{1}{z}\Big), \frac{1}{2i}\Big(z-\frac{1}{z}\Big)\right) \frac{1}{iz}\, dz = \frac{1}{i} 2\pi i \sum_{w\in\mathbb{D}} \operatorname{res}_w \widetilde{R} \,.$$

$\square$

Beispiel. Sei $w \in \mathbb{C}$, $|w| \neq 1$. Für $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2w\cos t + w^2}$ gilt

$$\begin{aligned} R(x,y) &= \frac{1}{1-2wx+w^2} \;, \quad \text{also} \\ \widetilde{R}(z) &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-2w\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+w^2} = \frac{1}{z}\frac{z}{z-wz^2-w+w^2z} = \frac{1}{(z-w)(1-wz)} \,. \end{aligned}$$

$\widetilde{R}$ hat genau einen Pol in $\mathbb{D}$, nämlich w falls $|w| < 1$ oder $\frac{1}{w}$, falls $|w| > 1$. Ist $|w| < 1$, so ist

$$\operatorname{res}_w \widetilde{R} = \lim_{z\to w}(z-w)\widetilde{R}(z) = \frac{1}{1-w^2} \,.$$

Ist $|w| > 1$, so ist

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_w \widetilde{R} &= \lim_{z\to\frac{1}{w}} \Big(z-\frac{1}{w}\Big)\widetilde{R}(z) = \lim_{z\to\frac{1}{w}} \frac{zw-1}{w}\cdot\frac{1}{(z-w)(1-wz)} \\ &= -\frac{1}{w}\cdot\frac{1}{\frac{1}{w}-w} = \frac{1}{w^2-1} \end{aligned}$$

Es folgt

$$I = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{1-w^2} & , \ |w| < 1 \\[2ex] \dfrac{2\pi}{w^2-1} & , \ |w| > 1 \,. \end{cases}$$

Wir betrachten nun *uneigentliche Integrale*.

3.3.2. **Satz.** *Sei f holomorph in $D \setminus F$, wobei $D \supset \{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, F endlich und $F \cap \mathbb{R} = \emptyset$. Es existiere $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ und es sei $\displaystyle\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$. Dann gilt:*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} w>0} \operatorname{res}_w f$$

Beweis : Sei $\gamma_r : [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_r(t) = re^{it}$. Dann gilt

$$\int_{-r}^{r} f(x)\, dx + \int_{\gamma(r)} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} w>0} \operatorname{res}_w f$$

für r genügend groß. Standardabschätzung $\Rightarrow$

$$\Big|\int_{\gamma(r)} f(z)\,dz\Big| \leq \sup_{\gamma(r)} |f| \cdot \pi r \to 0 \quad , \quad r \to \infty \ .$$

$\square$

3.3.3. **Folgerung.** *Sei* $R = \frac{P}{Q}$ *eine rationale Funktion, so dass* Q *keine reelle Nullstelle hat und* $\operatorname{grad} Q \geq \operatorname{grad} P + 2$. *Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\ w>0} \operatorname{res}_w R \ .$$

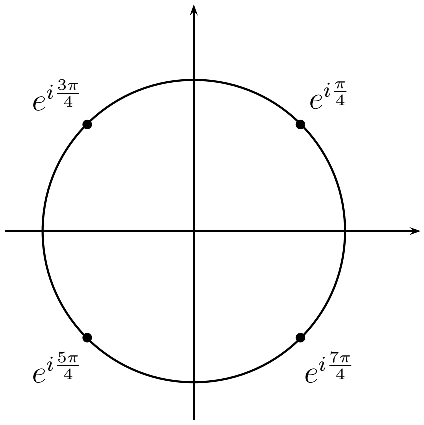
Beweis : $\operatorname{grad} Q \geq \operatorname{grad} P + 2 \Rightarrow |R(z)| = O\big(\frac{1}{|z|^2}\big)$, also $\lim_{z\to\infty} zR(z) = 0$. $\square$

Beispiel. Wir berechnen

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx \ .$$

Betrachte dazu $R(z) = \dfrac{z^2}{1+z^4}$. Die Nullstellen des Nenners sind die 4-ten Wurzeln von -1:

$$\Big\{e^{i\frac{(\pi+2k\pi)}{4}} : k = 0,1,2,3\Big\} = \Big\{e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}}\Big\}$$



Für $w = e^{i\frac{\pi}{4}}$ gilt:

$$\operatorname{res}_w f = \lim_{z\to w}(z-w)\cdot\frac{z^2}{1+z^4} = \frac{w^2}{(1+z^4)'|_{z=w}} = \frac{w^2}{4w^3} = \frac{1}{4w} = \frac{1}{4}\overline{w} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-i) \ .$$

Für $w_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = iw$ gilt:

$$\operatorname{res}_{w_1} f = \frac{w_1^2}{4w_1^3} = \frac{1}{4}\overline{w}_1 = -\frac{i}{4}\overline{w} = -\frac{i}{4\sqrt{2}}(1-i)$$

Es folgt:

$$I = 2\pi i \cdot \frac{(1-i)^2}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{i(1-2i-1)}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \ .$$

$\square$